ホモロジー代数の幾つかの論点について

アレクサンドル・グロタンディーク

（1957 年 3 月 1 日受理）

序文[1]

I. 論文の概要. 層を係数とする空間のコホモロジー論 [4], [5] と，加群の函手に対する導来函手の理論 [6] との間にある形式的な類似を試金石として，これらを含む諸々の理論を総括的に取り扱うことができるような共通の理論的枠組を追求することが本論文の出発点である．

その理論的枠組に関しては第 I 章で大まかに述べられる．そこでの主題は [3] と同じものであるが，1.4 節だけを除いて重複するところはない．とりわけ，アーベル圏における無限和及び無限積の概念を援用することにより，アーベル圏に単射的或いは射影的対象が「充分豊富に」存在するための有用な規準を与えることに専念した．単射的或いは射影的対象が充分豊富に存在しなければ，主要なホモロジーの技法を適用することができない．さらに読者の便宜を図り，充分に紙面を割いて函手の語法についての解説を行う（1.1, 1.2 及び 1.3 節）．1.3 節で加法圏を導入するが，これはアーベル圏の導入への前提となり,（例えば第 II 章でスペクトル函手を扱うための）共通の言語を提供する．

第 II 章では，アーベル圏に於けるホモロジーの定式化の要点を纏める．[6] が刊行されたおかげで，カルタン-アイレンベルクの技法を，些かの変更を加えることもなく，実に簡潔明瞭に新しい理論的枠組へと移し替えることが可能となった．しかしながら，2.1 及び 2.2 節は単射的あるいは射影的対象を充分豊富に含まないアーベル圏を除外することのない方法で書かれている．続く節では，分解という有用な技法を徹底的に用いる．2.4 及び 2.5 節は様々な補足を含んでおり，以降の理解のためには重要である．特に定理 2.4.1 は，周知のスペクトル系列の大半（そして本論文に出てくるのすべての場合）を得るための機械的な方法を与えるものである．

第 III 章では，古典的なルレイのスペクトル系列を含む，空間の層係数のコホモロジー論を再考察する．ここで与えられる考察は，[4], [15] に比べ，とりわけ次のような点で柔軟なものとなる．すなわち，この章でのほとんどすべての場合に於て（また後続の章に於ても），重要な結果のすべてが，考察される空間の性質に何ら制限を設けることなく得られるのである；そのため，代数幾何，或いは「数論幾何」[15], [8] で生ずる非分離空間に対しても理論が適用される．R. ゴドマン或いは H. カルタンとの対話は，理論を完成させる上で貴重なものであった．とりわけゴドマンにより導入された**脆弱層**及び**柔軟層**は多くの問題の中でうまく細層に置き換えられるため，極めて便利なものであることが明

[1]第 I, II, IV 章の主要な部分と第 III 章の一部は，1955 年の春，カンザス大学で開講されたホモロジー代数セミナーの折に考察されたものである．
— 括弧内の番号は本論文の末尾を参照のこと．

らかとなる．より完全な解説は R. ゴドマンにより準備中の文献 [9] に於て与えられるので，様々な細かな点についてはそれを参照にする．

第 IV 章では，加群の層の Ext という非古典的な問題を扱う．殊にここでは,「大域的な」Ext と局所的な」Ext とを結び付ける有用なスペクトル系列を見出す．第 V 章では状況が複雑である．そこではさらに群 G が空間 X に作用し，X 上に与えられた環の層 $\mathcal{O}$ と，$\mathcal{O}$ 上の加群の層が考察される．とりわけ 5.2 節で得られる主張は，固定点を持ち得る作用素の成す（位相を考慮しない）群を係数とする，空間の「チェック」コホモロジー論の最終的な形態であるように思える．それは新しい函手 $H^n(X;G,A)$ を導入することで表現される（これはそれ以前の多くの特別な場合に既に含まれている)：このとき二つのスペクトル函手が見出されるが，結果としてこれらは注目すべき最初の道具となる．

II. 応用． 紙数の関係のため，本論文では,（とりわけ 3.4 節と 3.6 節で）取り扱われる技法を応用することについてはほとんど述べることができなかったが，ついでなので幾つかを指摘するにとどめる．その上で，次の応用に注意しよう：

a) 加群の層の Ext の概念により，セールの「代数的双対定理」について最も一般的な定式化を得ることができる：A を n 次元非特異射影多様体上の代数的連接層 [15] とすると，このとき $H_p(X,A)$ の双対は $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}}^{n-p}(X;A,\Omega^n)$ と自然に同一視される．ここで，$\mathcal{O}$（resp. Ω^n）は X 上の正則函数（resp. 正則 n-形式）の芽の層である．

b) 第 III, IV, V 章で考察される定式化のすべてが抽象的代数幾何に適用され得る．その上でセール [15] [16][17] により射影多様体に対して示された種々の結果を，いかにして完備代数多様体に拡張することができるかを示す.

c) $H_n(X;G,A)$ は，層に於けるスティーンロッドの被約冪の一般理論と，標数 p の代数幾何にも適用されるような任意の空間の対称冪のコホモロジー論との間を自然に執り成すものであるように思われる．

III. 欠落事項． 乗法構造の問題は，第 III, IV, V 章で出てくる概念の応用上まったく重要なことではあるが，本論文が長くなりすぎないようにするため一言も触れずに済ませた．さらに注意すべきことに，必要とされる程度の一般性と単純性を兼ね備えた，ホモロジー代数に於ける乗法構造の満足すべき理論が未だ得られていないように思われる（[6] の第 II 章はこの状況を際立たせて説明している）[2]．層のコホモロジーに於ける乗法構造に対する満足すべき考察は [9] で見出される．その他の多くの欠落事項はおのずと読者の注意するところのものとなろう．

最後に，R. ゴドマン，H. カルタン，J. P. セールの三氏に対して心より感謝する．彼らの好意は本論文の執筆に欠くことのできない刺激となった．

[2] ホモロジー代数の乗法構造に対する一般的な定式化で，満足のいくものが最近 M. P. カルティエにより見出された．これに対しては然るべき所で解説されるだろう

目次

第 V 章

第 I 章　アーベル圏に関する一般論

1.1.　圏. 次のことを思い出しておこう．対象から成る空でない類 $\mathcal{C}$ が**圏**であるとは，$A,B\in\mathcal{C}$ に対して集合 $\mathrm{Hom}(A,B)$（ A から B への**射**の集合と呼ぶ）が与えられ，三つの対象 $A,B,C\in\mathcal{C}$ に対して $\mathrm{Hom}(A,B)\times\mathrm{Hom}(B,C)$ から $\mathrm{Hom}(A,C)$ への写像 $(u,v)\mapsto vu$（**射の合成**と言う）が与えられて，次の二つの公理を充たすときを言う：射の合成は**結合律**を充たす；任意の $A\in\mathcal{C}$ に対して $\mathrm{Hom}(A,A)$ の元 I_A（A の**恒等射**と呼ぶ）が存在し，射の合成について右単位的かつ左単位的である （このとき元 I_A は一意に定まる）．最後に，慎重を期するため，射 u が与えられると，それの「始点」及び「終点」の対象が決定されるものと仮定する．換言すると，(A,B) 及び (A',B') が互いに異なる $\mathcal{C}$ の対象の対であれば，$\mathrm{Hom}(A,B)$ と $\mathrm{Hom}(A',B')$ は交わらない二つの集合である．

$\mathcal{C}$ を圏とすると，**双対圏** $\mathcal{C}^\circ$ が次のようにして定義される．すなわち $\mathcal{C}^\circ$ は $\mathcal{C}$ と同じ対象をもつ圏で，A から B への射の集合 $\mathrm{Hom}(A,B)^\circ$ は $\mathrm{Hom}(B,A)$ と同一のものであり，$\mathcal{C}^\circ$ に於ける u と v の合成は $\mathcal{C}$ に於ける v と u の合成として定められる．一般の圏に関する概念及び記述に対し，(「矢印の向きを逆にすることにより」）つねにそれと双対な概念或いは記述が得られる．この双対な概念及び記述は，応用する上で元の概念或いは記述と全く同程度に有用なものであるが，それを明示的に述べることはしばしば読者に任される．

圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ に於ける射 $u:A\to B$ が与えられたとする．任意の $C\in\mathcal{C}$ に対し，写像 $v\mapsto uv:\mathrm{Hom}(C,A)\to\mathrm{Hom}(C,B)$ 及び写像 $w\mapsto wu:\mathrm{Hom}(B,C)\to\mathrm{Hom}(A,C)$ が定められる．u が**単射**である，或いは **単写的**である（resp. u が**全射**である，或いは**全写的**である）とは，この二つの写像のうちの前者（resp. 後者）の写像がつねに単写であるときをいう；u が全射かつ単射であるときには**全単射**であるという．$vu=I_A$（resp. $uv=I_B$）となる $v\in\mathrm{Hom}(B,A)$ を u の**左逆射**（resp. **右逆射**）という；左逆射かつ右逆射であるときには，v は u の**逆射**という（この場合逆射は一意に定まる）．u が逆射をもつとき，u は**同型射**であるという．u が左逆射（resp. 右逆射）をもつとき，u は単射（resp. 全射）であり，従って同型射は全単射である（一般に逆は成立しない）．

二つの単射（全射）の合成は単射（全射）であり，従って二つの全単射の合成は全単射である；同様に，二つの同型射の合成は同型射である．射 u,v の合成 vu が単射（resp. 全射）であれば，u（resp. v）もまたそうである．定義を示した後で，それに関する議論

を明示的に展開することは明らかに必要なことではあるが，大抵の場合，それは省略され，定義を丁寧に述べるにとどまる．

二つの単射 $u : B \to A$ 及び $u' : B' \to A$ を考えよう．v を B から B' への射であるとして，u を $u'v$ に分解することができるとき，u' は u より**上位である**，或いは u' は u を**含む**と言い，$u \leqq u'$ と書く（このとき，分解は一意に定まる）．これは A を値域とする単射類に於ける**前順序**関係である．そのような二つの単射 u, u' が**同値**であるとは，互いに他方に対して上位であるときを言う．このとき対応する射 $B \to B'$ 及び $B' \to B$ は互いに他方の逆射となっている．同値な単射の成す類全体に対して単射を一つずつ選ぶ（ヒルベルトの τ 記号を用いてどのようにでも選ぶことができる）: 選ばれた単射は A の**部分対象**と呼ばれる．このように，A の部分対象は単なる $\mathcal{C}$ の対象ではなく，**標準的入射**と呼ばれる単射 $u : B \to A$ を伴う対象 B である（にもかかわらず，語の濫用により，しばしば A の部分対象を記号 B で表す．ここで B は対応する $\mathcal{C}$ の対象である）．$\leqq$ による関係は A の部分対象の類上に（単なる前順序関係ではなく）**順序**関係を定める．上の方で見てきたことから，部分対象 B に含まれる A の部分対象は B の部分対象と同一視されることとなり，この対応は自然に順序関係を保つ（しかしながら，これは B の部分対象が A の部分対象に**等しい**ということを意味しない．実際そうなるためには $A = B$ となることが必要である）．

これの双対概念として，A を定義域とする全射類に於ける前順序を考えることにより，順序構造をもつ A の**商対象**の類を定義することができる．

$A \in \mathcal{C}$ とし，$(u_i)_{i\in I}$ を射 $u_i : A \to A_i$ の空でない族とする．このとき任意の $B \in \mathcal{C}$ に対し，$\mathrm{Hom}(B, A)$ から $\mathrm{Hom}(B, A_i)$ への写像 $v \mapsto u_i v$ は自然に写像

$$\mathrm{Hom}(B, A) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(B, A_i)$$

を定める．任意の B に対してこの写像が全単写であるとき，u_i は A_i **の直積としての** A **の表現**を定めるという．いまこのような状況になっているものとし，また A' を $\mathcal{C}$ に於ける A とは異なる対象で，射 $u'_i : A' \to A'_i$ （添字の集合は同じものとする）により A'_i の積として表現されているものとする．このとき，(v_i) を射 $v_i : A_i \to A'_i$ の任意の族とすると，任意の i に対して $u'_i v = v_i u_i$ となる A から A' への射 v が一意に存在する．結果，v_i が同値であれば，v も同様である；特に v_i を恒等写像 I_{A_i} として，A_i の積として表現される二つの対象 A, A' は標準的同型であることがわかる．このとき上記のような $(A, (u_i))$ 全体の中から（例えばヒルベルトの τ 記号を用いて）特別な系を一つ選んでやることは自然なことであり，これを対象の族 $(A_i)_{i\in I}$ の**積**と呼ぶ．従って，これは $\mathcal{C}$ の単なる対象 A ではなく，A_i への射の族 (u_i) を備えているような対象のうちの一つである．u_i は積から因子 A_i の上への**標準的射影**と呼ばれ，A_i の積を（存在すれば）$\prod_{i\in I} A_i$ によって表す．I が一つの元 i から成るときには，その積は A_i 自身と同一視される．$\mathcal{C}$ の二つの対象の積がつねに存在するとき，$\mathcal{C}$ は**積を伴う圏**であるという（このとき，$\mathcal{C}$ の対象から成る，空でない任意の有限族の積もつねに存在する）．$\mathcal{C}$ の対象から成る，空でない任意の族の積がつねに存在するとき，$\mathcal{C}$ は**無限積を伴う圏**であるという．

積 $A=\prod_{i\in I} A_i$ と $B=\prod_{i\in I} B_i$ が同じ添字の集合 I に対応しているとき，射 $A_i \to B_i$ の族 (v_i) が A から B への標準的な射を定めるということはすでに見た．これを**射 v_i の積**と呼び，時に $\prod_{i\in I} v_i$ で表す．v_i が単射であれば，その積も単射であるが,（例えば固定された位相空間上の層の成す圏上で見て取れるように）全射に対して類似の主張は一般的には正しくはない．

これの双対を考えることにより，次の概念を定義することが可能となる．すなわち，射 $u_i : A_i \to A$（但し，任意の $B \in \mathcal{C}$ に対して，自然な写像

$$\mathrm{Hom}(A,B) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(A_i, B)$$

は全単写）による，対象の族 A_i の**直和としての対象 A の表現**，**標準的入射** $A_i \to \bigoplus_{i\in I} A_i$ をもつ**和** $\bigoplus_{i\in I} A_i$（但し，この標準的入射はその呼び方にも関わらず，必ずしも単射ではない），射の族 $u_i : A_i \to B_i$ から定まる**射の和**等である．u_i が全射であれば，その和も同様に全射となる．

1.2. 函手. $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ を圏とする．次のことを思い出そう．すなわち，$\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}'$ への**共変函手**とは，対象 $A \in C$ を $\mathcal{C}'$ の対象 $F(A)$ に対応させ，$\mathcal{C}$ に於ける射 $u : A \to B$ に射 $F(u) : F(A) \to F(B)$ を対応させる「函数」で，$F(I_A) = I_{F(A)}$ 及び $F(uv) = F(v)F(u)$ を充たすものを言う．これの類似として，$\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}'$ への**反変函手**を定義することが出来る（これはまた $\mathcal{C}^\circ$ から $\mathcal{C}'$ 或いは $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}'^\circ$ への共変函手である）．同様にして，ある幾つかの変数に関しては共変で，他の幾つかの変数に関しては反変であるような多変数の函手，或いは**重複函手**を定義することが出来る．大抵の場合，簡単のため一変数の函手に限って話を進める．函手の合成は函数と同様である．この合成は結合的であり,「恒等函手」は単位元の役割を果たす．

$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ を固定された圏とし，F, G を $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}'$ への共変函手とする．このとき，F から G への函手間の射（あるいは F から G への「自然変換」とも呼ばれる） f とは，任意の $A \in \mathcal{C}$ に $F(A)$ から $G(A)$ への射 $f(A)$ を対応させる「函数」で，$\mathcal{C}$ に於ける任意の射 $u : A \to B$ に対して，次の図式が可換となるようなものである．

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "f(A)"'] & F(B) \arrow[d, "f(B)"] \\
G(A) \arrow[r, "G(u)"] & G(B)
\end{tikzcd}$$

また函手間の射 $F \to G$ と $G \to H$ の合成の仕方は明らかである．この合成は結合的であり，函手 F の「恒等射」は函手間の射の合成に関する単位元である（従って $\mathcal{C}$ が集合であれば，$\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}'$ への函手は一つの新しい圏を構成する）．最後に次のことに注意しておこう．函手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ と $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ の合成 GF は形式的に G と F に関する複函手として振舞う：函手間の射 $G \to G'$（resp. $F \to F'$）は函手間の射 $GF \to G'F$（resp. $GF \to GF'$） を定義する．

圏 $\mathcal{C}$ と圏 $\mathcal{C}'$ の**同値系**とは，共変函手

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}' \qquad G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$$

と，函手間の射

$$\varphi : 1_{\mathcal{C}} \to GF \qquad \psi : 1_{\mathcal{C}'} \to FG$$

（但し，$1_{\mathcal{C}}$ と $1_{\mathcal{C}'}$ はそれぞれ $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ の恒等函手である）から成る系 (F, G, φ, ψ) で，任意の $A \in \mathcal{C}, A' \in \mathcal{C}'$ に対して，合成

$$F(A) \xrightarrow{F(\varphi(A))} FGF(A) \xrightarrow{\psi^{-1}(F(A))} F(A)$$

$$G(A') \xrightarrow{G(\psi(A))} GFG(A') \xrightarrow{\varphi^{-1}(G(A))} G(A')$$

がそれぞれ $F(A), G(A')$ の恒等射であるようなものを言う．このとき，$\mathcal{C}$ の対象の任意の対 A, B に対して，$\mathrm{Hom}(A, B)$ から $\mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ への写像 $f \mapsto F(f)$ は全単写である．これの逆写像は $\mathrm{Hom}(F(A), F(B)))$ から $\mathrm{Hom}(GF(A), GF(B))$ への写像 $g \mapsto G(g)$ であり，$\mathrm{Hom}(GF(A), GF(B))$ は同型写像 $\varphi(A) : A \to GF(A)$ と $\varphi(B) : B \to GF(B)$ により $\mathrm{Hom}(A, B)$ と同一視される．圏の間の同値系は函手として振舞う．圏の間に同値系が存在するとき，この二つの圏は**同値**であると言う．このとき一般に言葉の上で両者を区別する必要はない．しかしながら，この同値という概念と，これよりはるかに強い条件である同型という概念（これは集合である圏を比較したいときに用いられる）との違いに注意することは重要である．$\mathcal{C}$ を空でない集合とし，任意の対象の対 $A, B \in \mathcal{C}$ に対して，集合 $\mathrm{Hom}(A, B)$ は一つの元から成るものとする．このとき $\mathcal{C}$ は（可能となるただ一つの合成 $\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$ に対して）圏となる．この過程を経て構成される二つの圏はつねに同値であるが，対等でない限り同型ではない．実際に我々が目にする同値な圏はつねに同型とは限らない．

1.3.　加法圏.　**加法圏**とは次の条件を充たす圏 $\mathcal{C}$ である．$\mathcal{C}$ の対象の任意の対に対して $\mathrm{Hom}(A, B)$ はアーベル群となり，射の合成に関して双線形である．さらに $\mathcal{C}$ の任意の対象 A, B の和及び積が存在することを仮定する．ただし，A と B の和或いは積のいずれか一方の存在を仮定すれば充分で，このとき他方の存在はそれから容易に導き出され，さらに $A + B$ と $A \times B$ は標準的に同型となる（例えば $A \times B$ が存在すると仮定すると，標準的射影との合成がそれぞれ $(I_A, 0), (I_B, 0)$ となる射 $A \to A \times B, B \to A \times B$ を考え，A と B の直和としての表現が得られることがわかる）．最後に，$I_A = 0$ となるような対象 A の存在を仮定し，これを $\mathcal{C}$ の零対象或いは**零**と呼ぶ．これは $\mathrm{Hom}(A, A)$ が零になるということ，或いはさらに任意の $B \in \mathcal{C}$ に対して，$\mathrm{Hom}(A, B)$（或いは $\mathrm{Hom}(B, A)$）が零になるということと同じことになる．A と A' が零対象であるとき，A から A' への同型写像が一意に存在する（これは $\mathrm{Hom}(A, A')$ のただ一つの元 0 であることがわかる）．それゆえ，$\mathcal{C}$ のすべての零対象をひとつだけのものに同一視し，記法の濫用であるが，これを 0 で表す．

加法圏の双対圏はまた加法圏である．

$\mathcal{C}$ を加法圏であるとし，$u : A \to B$ を $\mathcal{C}$ に於ける射であるとする．u が単射（resp. 全射）であるためには，u との右（resp. 左）からの合成が零になる射は必ず零であることが必要かつ充分である．単射 $i : A' \to A$ が**一般核**であるとは，u の右零因子である射 $C \to A$ がつねに $C \to A' \xrightarrow{i} A$ と分解されるようなものであるときを言う；そのような単射は同値を除いて定められる（1.1 節を参照）．従って u の一般核が存在すれば，その中に A の部分対象であるものがちょうど一つ存在する．これを u の核と呼び，$\ker u$ で表す．これの双対概念として u の**余核**（存在すれば，B の商対象である）を定義し，$\mathrm{Ker}\ u$ で表す．射 u の余核の核（resp. 核の余核）が存在するとき，これを u の**像**（resp. **余像**）と呼ぶ；従ってこれは B の部分対象（A の商対象）[3]であり，$\mathrm{Im}\ u$（resp. $\mathrm{Coim}\ u$）で表す．u の像と余像が存在すれば，射 $\overline{u} : \mathrm{Coim}\ u \to \mathrm{Im}\ u$ が一意に存在して，u は $A \to \mathrm{Coim}\ u \to \mathrm{Im}\ u \to B$ の合成に同一視される．ここで，両端の射は標準的射である．

加法圏 $\mathcal{C}$ から別の加法圏 $\mathcal{C}'$ への函手 F が**加法函手**であるとは，$\mathcal{C}$ に於ける射 $u, v : A \to B$ に対して，$F(u+v) = F(u) + F(v)$ となるときを言う．重複函手に対しても同様の定義がなされる．加法函手の合成函手は加法函手である．F が加法函手であるとき，F は対象 A_i の有限直和を $F(A_i)$ の直和に移す．

[3]実を言うと，u の像のより自然な定義は，u が A から B' への射から得られるような B のもっとも小さな部分対象 B' を（存在すれば）取ることである．$\mathcal{C}$ が**アーベル圏**（1.4 節を参照）である場合には，この定義は本文で与えられた定義と同値ではない．