代数幾何原論

アレキサンドル・グロタンディーク著

編集協力　ジャン・デュドネ

I

シェマの言語

序文

オスカー・ザリスキーとアンドレ・ヴェイユに捧ぐ

本論文及び，此の続編として遂行すべき数多の論文群は代数幾何教程の体を為す様組ませてある．原則として此の分野に固有の知識は如何なるものであれ前提としていない．また，然様な見識は，確かに利点を多々有するものの（双有理性と云う観点に必要以上重きを置く余り）本論考で説かれる観点・技法に精通せんとする者には，時として有害たり得る事は云わば自明と云えよう．その代わり、読者は以下の題目に熟知しているものとする：

a) **可換代数**　此れは例えばブルバキ『数学原論』叢書で目下執筆進行中の巻目に於て論じられる（其れが刊行される迄は，サミュエル-ザリスキー [13] とサミュエル [11]，[12] を参照）

b) **ホモロジー代数**　此れに関してはカルタン-アイレンベルク [2]（以下 (M) と略す），ゴドマン [4]（以下 (G) と略す）そしてグロタンディークの近著論文 [6]（以下 (T) と略す）を参照の事.

c) **層の理論**　主要参考文献としては (G) と (T) が挙げられる；此の新理論は可換代数に於ける基本的な諸概念を《幾何学》の言葉に翻訳し, 其れ等を《大域化》する際に必要不可欠な語法を産出する.

d) 終りに，本教程に於てのべつ活用される，**関手性と云う言語**を少々使い慣れている事は，読者にとって有効であろう．此れに関しては (M) 及び (G)，取り分け (T) が良き手引きとなろう；此の言語の基礎知識及び関手に関する一般論上での主要結果は，本教程執筆陣に由り現在準備中の著書にて，一層詳細に説き起こされる予定である.

***

此の序文で，代数幾何に於ける《シェマ》に依る観点の概略を多かれ少なかれ述べる事は適切で無い．其れを何故採用するに至ったのか，なかんずく我々が考察する《多様体》の局所環の冪零元を体系的に取り入れる事の理由（正則写像やシェマの《射》と云う概念を中心に据える為，必然的に有理写像と云う概念は副次的なものとなったのであるが）を長々と書き連ねる場でも無い．本教程はまさに《シェマ》と云う言語を体系的な方法で発展せしめんとする事を目論んでいる．そして願わくば，其れが必要不可欠である事を実証する．序章で研究される概念の《直感的な》導入を，容易ではあるが，此処で与える事はせぬ．予め本教程の概要を把握せんと欲する読者は，1958 年のエジンバラに於ける国際数学者会議でのグロタンディークの講演録 [7] や同著者による解説 [8] を参照にすれば能い．またセールによる論文 [14]（以下 (FAC) と略す）は，代数幾何学に於ける古典的な観点と シェマに依る観点の中間に位置するものと看做し得る．其れ故本**教程**を読む前の準備として最適である.

***

タイトルの一覧を記す事で，本教程の計画の全貌を下記に与える．尤も後に修正を施す可能性は多分にある．殊最終章はそうである.

序　章　シェマの言語
第 II 章　射の類の基本的な大域的考察
第 III 章　代数的連接層のコホモロジー・応用
第 IV 章　射の局所的研究
第 V 章　シェマの構成に関する基本的考察
第 VI 章　降下の技法・シェマの構成に関する一般的方法
第 VII 章　群シェマ・主繊維空間
第 VIII 章　繊維空間の微分学的研究
第 IX 章　基本群
第 X 章　留数と双対性
第 XI 章　交叉理論，陳類，リーマン-ロッホの定理
第 XII 章　アーベルシェマとピカールシェマ
第 XIII 章　ヴェイユコホモロジー

原則として，各章は完結せぬものと考えており，常に後から補足が付け加えられる可能性がある；出版の不便を減じる為，其の様な補足は分冊として出版される．或る章を刊行せんとする時に，其の様な補足が既に書き上げられているか或いは執筆中であるかする時には，幾分急な要請である為，実際の刊行は当然後からに為るが，当該の章の要約に於て言及される．読者の便宜の為,《第 0 章》に於て，可換代数，ホモロジー代数，層の理論等々を補う．此れらは本教程の各章を通じて用いられ，多少能く知られてはいるが，目的に適った文献を挙げる事は出来ない．本教程を読んでいる途上では，厳密に云うと我々が頻繁に扱っている結果に余り習熟していない状態では，読者は第 0 章を参照しない事をお勧めする．其の様にすれば本教程を読む事は，初学者が可換代数やホモロジー代数に習熟する事を可能にする秀逸な方法と為り得ると考えるからである．可換代数やホモロジー代数の研究は具体的な応用を伴わなければ，大多数は詰まらぬものと判断し，辟易とした眼差しで以って眺めるのである．

$*^{*}*$

此の序文に於て，本教程で述べられる概念や結果を歴史的に概観する事，或いは要約する事ですら我々の能力の及ぶ所では無い．本文中では，理解に対し有用であると特に判断された文献の外は引用せず，極めて重要である結果に対してのみ出典を記す．我々が議論する対象は，少なくとも形式の上では充分に新しく，我々が風説より外に其の研究を窺い知る事の無い，19 世紀と 20 世紀初頭の代数幾何の創始者達による文献に附いて説明を加える事は殆ど無い．併しながら，極めて直截的に著者に影響を与え，シェマに依る観点の進展に貢献した文献に附いて，此処で二言三言附言しおかねば為るまい．セールに依る基本的な論文 (FAC) を先ず第一に挙げるのが妥当である．セールの御蔭で一人の優秀な学徒（其れは本教程の執筆陣の一人である）が代数幾何へと誘われる事に為るのであるが，彼はヴェイユによる古典である**代数幾何の基礎**[18] の限界に遣る方の無い想いであった．代数トポロジーの幾つかの技法が《抽象》代数多様体の《ザリスキー位相》に見事に適用され，なかんずくコホモロジー論を用いる根拠を与えたのが此の論文である．しかも其の論文で与えられる代数多様体の定義は，我々が此処で考察する拡張概念へと極自然に導かれるものである[1]．更にセールは，体上の代数多様体を何らかの可換環で置き換える事に拠り，アフィン代数多様体のコホモロジー論を難無く再構成する事が可能であると，彼自身考察していた．其れ故本教程の第 I，II 章及び第 III 章の初めの二節は，本質的には，(FAC) 及び同著者により後に書かれた論文 [15] に於ける主要な結果を，その拡張概念の枠組みで簡単に捉え直したものと考えられる．我々はまたシュヴァレーの**代数幾何セミナー**[1] を大いに利用する；分けても，其処で導入された《構成的集合》は， シェマの理論に於て極めて有効である事が白日の下に晒される（第 IV 章参照）．我々はまた次元に基づいた射に関する考察を利用する（第 IV 章）．此れは著しい変更を加える事無く，シェマの枠組みで再解釈される．一方シュヴァレーにより導入された《局所環のシェマ》は刮目に値する．此れは自然に代数幾何の拡張へと導かれる（併し乍我々が要求する柔軟性と一般性の総てを備えてはいない）；此の概念と我々の理論との関係については序章の §8．を見よ．然様な拡張概念の一つは，永田により，デデキント環上の代数幾何に関する数々の結果を含む一連の論文 [9] に於て考察された[2]．

$*^{*}*$

最後に，云わずもがなであるが，代数幾何に関する教科書は，なかんずく代数幾何の基礎付けに関する教科書はザリスキーやヴェイユと云った数学者の影響を免れ得ず，彼等の代弁をしているに過ぎない．分けてもザリスキーの**正則関数論**[20] は，コホモロジーと完備化の手法の効果で存在定理（第 III 章の §4 と 5）により極めて適用範囲の広いものと為り，(第 VI 章で考察される降下の技法と共に) 本教程で主として用いられる道具である．此れは代数幾何で用いられる道具の中でも極めて強力なものである様に思われる．

其れを含む一般的な手法は以下の様にして纏める事が出来る（典型的な例は，第 IX 章の基本群の考察に於て与えられよう）．代数多様体間の（一般的には，シェマ間の）固有射（第 II 章）$f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ を取り，点 $y \in \mathrm{Y}$ の近傍に関し問題 P を解決する事を目標として，y の近傍で其の射を考察せんとする．以下の様な過程で議論を進める：

[1]次の事に留意しておかねばなるまい．即ちセールが指摘する様に，環の層を与える事で多様体の構造を定めると云う発想はカルタンに負う．カルタンは解析空間の理論を出発点として，斯かる発想に到達したのである．代数幾何同様,《解析幾何》に於ても解析空間の局所環の冪零元を取り扱う為の根拠を与える事は肝要である．カルタンやセールによる定義を斯くの如く拡張する試みは，近年グラウエルト [5] に於て遂行された．解析幾何が一般的な枠組みで体系的に論じられるのもそう遠い日ではあるまいと期待するのも尤もな事である．更に，本教程で議論される概念や技法が解析幾何に於て意味を為す事は明白である．とは雖も，此の新理論に於ては一層大きな技術上の困難がある事に留意せねばならない．

[2]代数幾何に於ける我々の観点に近しい研究の中では，ケーラーによる重要な論文 [22] 及び，近年周と井草により書かれた論文 [3] を特に挙げる．此れ等は (FAC) の幾つかの結果を永田-シュヴァレーの理論の枠組みで捉え直し，キュンネの公式をも与えるものである．

（中略）

以上によりアルチン環 A 上の シェマの体系的な考察が重要である事が分かる．局所類体論に於けるセールの視点やグリーンバーグの近著論文に於ける考察等は次の事を示している様に思われる．即ち然様な考察が目論んでいるのは シェマ X に，n を A の長さとして,（望ましい場合には）次元が n dim X である A の剰余体（完全体とする）上の シェマ X' を対応せしめる事である．

ヴェイユによる影響に関しては次に挙げるもので事足りる．即ち,《ヴェイユコホモロジー》を出来得る限り一般的に定式化せねばならぬと云う事，そしてディオファントス幾何でよく知られている予想を証明するのに必要と為る，定式化された性質一切の証明に取り組む為[3]には，其れに必要な道具一式を創り上げねばならぬと云う事である．代数幾何に於て普遍的に用いられる概念や手法を，自然な枠組みの中で見出さんと望み，当該の概念や技法を理解する契機を与えんと願うのと同様，本教程の中心的な原動力と為ったのは，まさに此れである．

***

最後に，予め読者に云うておくべきであると思うのだが，シェマの言語に慣れ，幾何的な直感を念頭に置いた伝統的な構成法が，本質的には唯一つの合理的な方法で，シェマの言語に翻訳され得ると受け入れる事は，著者自身もだが，疑いようも無く難儀である．現代数学の大半がそうである様に，精密且つ普遍的な表現が要求される為，最初の直感と厳密な言葉とが外見上次第に乖離していくのである．此の場合,（前シェマの為す圏，或いは与えられた前シェマ上の前シェマの為す圏を知る事で）直積，群・環・加群の法則，繊維空間，同質主繊維空間等々集合と密接に関わっている諸概念による圏とは，既に可成り異なったものとなっている圏の対象の考察に移行せねばならぬ事に，心理的抵抗を覚えるのである．将来数学者が，集合論に基づいた創始者達によるものと比べて，最小限に抑えたとしても結局は新たな抽象化への推進力を避ける事は疑い様も無く困難である．

***

参照番号は次の様にして従って与えられる；例えば III, 4.9.3 の場合，III は章番号を表し，4 は節番号を表し，9 は項番号を表す．同章内に於ては，章番号は省略される．

[3]一切の誤解を避ける為に断言するが，此の序文が書かれた段階では殆ど見通しが立っておらず，従っていまだヴェイユ予想の証明には至っていない