第 1 章
シェマ言語

要約

§ 1. アフィンシェマ
§ 2. 前シェマ及び前シェマの射
§ 3. 前シェマの直積
§ 4. 部分前シェマと埋入射
§ 5. 被約前シェマ；分離条件
§ 6. 有限性の条件
§ 7. 有理写像
§ 8. シュヴァレィシェマ
§ 9. 準連接層に関する補足
§ 10. 形式的シェマ

§1 から §8 までは，これ以降全般に渡つて用ゐらるる言語の敷衍にのみ費やさる．しかしながら，次のことに留意しておくべきである．すなはち夲原論の夲義に従ひ，§7 及び §8 は他節に比してそれ程有用ではなく，また夲質的な手法でもない；加へて，シュヴァレィ[1] 及び永田 [9] に於ける語法と關連付けるより外の目的でシュヴァレィシェマについて論ずることはない．§9 では準連接層に關する定義及び結果等が與へらる．そのうちの幾つかは，可換代數に於ける周知の概念をただ《幾何の》言葉で飜譯したに留まるものではなく，既に大域的性質と爲るものである；それ等は次章での射の大域的考察に於て必要不可缺なものである．最後に，§10 ではシェマの概念の一般化が導入さる．これは第 III 章で固有射のコホモロジィ的考察に於ける基夲的な結果を簡潔に定式化し，證明する爲の便宜を圖つたものである；更に，形式的シェマの概念が《加羣の理論》（代數多様體の分類の問題）に關する幾つかの事實を説明する爲になくてはならぬものであるやうに考へらるることを指摘しておく．§10 の結果は第 III 章の §3 まで用ゐらるることはなく，それまでは讀むのを控へておいた方がよい．

§ 1. アフィンシェマ

1.1. 環の素スペクトル

(1.1.1)　記號：A を（可換）環とし，M を A-加羣とする．夲章と次章では以下の記號を恆に用ゐる：

$\mathrm{Spec}(A) = A$ の**素スペクトル**とも呼ばるる，A の**素イデヤルの爲す集合**；$x \in X = \mathrm{Spec}(A)$ に対して，x の代わりに $\mathfrak{j}_x$ と書くことが屡々好都合である．$\mathrm{Spec}(A)$ が**空**である爲には，環 A が零環に爲ることが必要且つ充分である．

$A_x = A_{\mathfrak{j}_x} =$ **分數から爲る（局所）環** $S^{-1}A$，但し $S = A - \mathfrak{j}_x$.

$\mathfrak{m}_x = \mathfrak{j}_x A_{\mathfrak{j}_x} = A_x$ の**極大イデヤル**.

$\boldsymbol{k}(x) = A_x/\mathfrak{m}_x = A_x$ **の剩餘體**，此れは整域 $A/\mathfrak{j}_x$ の商體と標準的に同型であり，此等を同一視する．

$f(x) = A/\mathfrak{j}_x \subset \boldsymbol{k}(x)$ に於ける類 $f \pmod{\mathfrak{j}}_x$，但し $f \in A, x \in X$．また $f(x)$ を點 $x \in \mathrm{Spec}(A)$ での f の**値**と云ふ；$f(x) = 0$ は $f \in \mathfrak{j}_x$ と**同値**.

$M_x = M \otimes_A A_x = A - \mathfrak{j}_x$ に分母を有する分數加羣.

$\mathfrak{r}(E) = A$ **の部分集合** E **によつて生成さるる** A **のイデヤルの根**.

$V(E) = E \subset \mathfrak{j}_x$ **と爲るやうな** $x \in X$ **の集合**（或いはまた任意の $f \in E$ に對して $f(x) = 0$ と爲る $x \in X$ の集合）．從つて

$$\mathfrak{r}(E) = \bigcap_{x \in V(E)} \mathfrak{j}_x \tag{1.1.1.1}$$

と爲る．

$V(f) = V(\{f\})$，但し $f \in A$.

$D(f) = X - V(f) = f(x) \neq 0$ **と爲る** $x \in X$ **の集合**.

命題 (1.1.2)　— 次の性質を得る：

(i)　$V(0) = X$，$V(1) = \emptyset$.

(ii)　$E \subset E'$ **ならば** $V(E) \supset V(E')$.

(iii)　A **の部分集合族** (E_λ) **に対して，**$V(\cup_\lambda E_\lambda) = V(\Sigma_\lambda E_\lambda) = \cap_\lambda V(E_\lambda)$.

(iv)　$V(EE') = V(E) \cup V(E')$.

(v)　$V(E) = V(\mathfrak{r}(E))$.

(i), (ii), (iii) の性質は自明であり，(v) は (ii) 及び公式 (1.1.1.1) より導かる．$V(EE') \supset V(E) \cup V(E')$ は明らか；逆に $x \notin V(E)$ 且つ $x \notin V(E')$ とすると，$\boldsymbol{k}(x)$ に於て $f(x) \neq 0, f'(x) \neq 0$ と爲る $f \in E$ 及び $f' \in E'$ が存在し，從つて $f(x)f'(x) \neq 0$，すなはち $x \notin V(EE')$ と爲り，これは (iv) を示す．

命題 (1.1.2) は，とりわけ $V(E)$（但し E は A の部分集合をとる）と爲る集合が X の**閉集合**と爲ることを示しており，これを**スペクトル位相**と稱す[1];斷りがなければ，$X = \mathrm{Spec}(A)$

[1]代數幾何に於ける此位相の導入はザリスキーに負う．これはまた《ザリスキー位相》と稱せらる．

は恆にスペクトル位相を備へてゐるものとする．

(1.1.3) Y が X の任意の部分集合であるとき，任意の $y\in Y$ に對して $f(y)=0$ と爲るやうな $f\in A$ の集合を $\mathfrak{j}(Y)$ で表はす；$\mathfrak{j}(Y)$ は $y\in Y$ に對する素イデヤル $\mathfrak{j}_y$ の共通部分であると云ふのと同じことと爲る．明らかに $Y\subset Y'$ ならば $\mathfrak{j}(Y)\supset\mathfrak{j}(Y')$ であり，X の任意の部分集合族 (Y_λ) に對して

(1.1.3.1) $$\mathfrak{j}\left(\bigcup_\lambda Y_\lambda\right)=\bigcap_\lambda \mathfrak{j}(Y_\lambda)$$

が爲り立つ．最後に

(1.1.3.2) $$\mathfrak{j}(\{x\})=\mathfrak{j}_x$$

が爲り立つ．

命題 (1.1.4) — (i) A **の部分集合** E **に對して，**$\mathfrak{j}(V(E))=\mathfrak{r}(E)$ **が爲り立つ**．

(ii) X **の部分集合** Y **に對して，**$V(\mathfrak{j}(Y))=\overline{Y}$ **が爲り立つ．但し，**$\overline{Y}$ **は** X **に於ける閉方を表はす**．

(i) は定義と (1.1.1.1) より直ちに從ふ；他方，$V(\mathfrak{j}(Y))$ は Y を含む閉集合である；逆に，$Y\subset V(E)$ ならば，任意の $f\in E$ 及び任意の $y\in Y$ に對して $f(y)=0$ であるので，從つて $E\subset\mathfrak{j}(Y), V(E)\supset V(\mathfrak{j}(Y))$ と爲り，(ii) が證明さる．

系 (1.1.5) — $X=\operatorname{Spec}(A)$ **の閉部分集合と，自身の根に等しい** A **のイデヤル（換言すれば，素イデヤルの共通部分と爲る** A **のイデヤル）とは，減少寫像** $Y\mapsto\mathfrak{j}(Y), \mathfrak{a}\mapsto V(\mathfrak{a})$ **によつて一對一に對應する；二つの閉部分集合の合併** $Y_1\cup Y_2$ **は** $\mathfrak{j}(Y_1)\cap\mathfrak{j}(Y_2)$ **に對應し，任意の閉部分集合族** (Y_λ) **は** $\mathfrak{j}(Y_\lambda)$ **の和の根に對應する**．

系 (1.1.6) — A **がネタア環であるとき，**$X=\operatorname{Spec}(A)$ **はネタア空間である**．

階數 1 の非離散附値環の如き $\{0\}$ でない唯一つの素イデヤルを有する非ネタア整域の例が示すやうに，系 (1.1.6) の逆は成立しない．

スペクトルがネタア空間でない環 A の例としては，無限コンパクト空間 Y 上の連續函數の爲す環 $\mathscr{C}(Y)$ を擧げることが出來る；Y は，集合としては A の極大イデヤルの爲す集合と同一視さる．また容易に分かるやうに，$X=\operatorname{Spec}(A)$ による Y 上の誘導位相は，Y の有してゐる元々の位相と一致する．Y はネタア空間ではあらぬので，X についても同樣である．

系 (1.1.7) — **任意の** $x\in X$ **に對して，**$\{x\}$ **の閉方は** $\mathfrak{j}_x\subset\mathfrak{j}_y$ **と爲る** $y\in X$ **の集合である．**$\{x\}$ **が閉である爲には，**$\mathfrak{j}_x$ **が極大イデヤルであることが必要且つ充分である．**

系 (1.1.8) — $X=\operatorname{Spec}(A)$ **はコルモゴロフ空間である．**

何と爲れば，x,y が X の異なる二點であれば，$\mathfrak{j}_x\not\subset\mathfrak{j}_y$ であれ $\mathfrak{j}_y\not\subset\mathfrak{j}_x$ であれ，點 x,y の內の一方は他方の閉方に含まれない．

(1.1.9) 命題 (1.1.2, (iv)) より，A の元 f,g に對して

(1.1.9.1) $$D(fg)=D(f)\cap D(g)$$

が爲り立つ．

また次のことに留意しやう．すなはち $D(f) = D(g)$ と爲る關係は，命題 (1.1.4, (i)) 及び命題 (1.1.2, (v)) より $\mathfrak{r}(f) = \mathfrak{r}(g)$ であること，或いは更に (f) を含む極小素イデヤル達と (g) を含む極小素イデヤル達が同一のものであることを意味する；殊に u を可逆元として，$f = ug$ であるときに斯かる状況が成立する．

命題 (1.1.10)　— (i) f **が** A **の元を走るとき，**$D(f)$ **は** X **の位相の開基を爲す．**

(ii) **任意の** $f \in A$ **に對して，**$D(f)$ **は準コンパクトである．殊に** $X = D(1)$ **は準コンパクトである．**

(i) U を X 上の開集合とする；定義より，E を A の部分集合として，$U = X - V(E)$ と爲る．$V(E) = \bigcap_{f \in E} V(f)$ であり，從つて $U = \bigcup_{f \in E} D(f)$ である．

(ii) (i) より，$(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ が $D(f) \subset \bigcup_{\lambda \in L} D(f_\lambda)$ と爲るやうな A の元の族であれば，$D(f) \subset \bigcup_{\lambda \in J} D(f_\lambda)$ と爲るやうな L の有限部分集合 J が存在することを示せば充分である．$\mathfrak{a}$ を f_λ 達によつて生成さるる A のイデヤルとする；假定より $V(f) \supset V(\mathfrak{a})$ と爲り，從つて $\mathfrak{r}(f) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ と爲る；$f \in \mathfrak{r}(f)$ であるので，整數 $n \geqslant 0$ が存在して，$f^n \in \mathfrak{a}$ と爲る．併し此時 f^n は有限部分族 である $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ によつて生成さるるイデヤル $\mathfrak{b}$ に含まれ，$V(f) = V(f^n) \supset V(\mathfrak{b}) = \bigcap_{\lambda \in J} V(f_\lambda)$，すなはち $D(f) \subset \bigcup_{\lambda \in J} D(f_\lambda)$ と爲る．

命題 (1.1.11)　— A **の任意のイデヤル** $\mathfrak{a}$ **に對して，**$\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ **は**$\mathrm{Spec}(A)$ **の閉部分空間** $V(\mathfrak{a})$ **と自然に同一視される．**

何と爲れば，$A/\mathfrak{a}$ のイデヤル（resp. 素イデヤル）と $\mathfrak{a}$ を含む A のイデヤル（resp. 素イデヤル）との間には，包含關係による順序構造を保つ標準的な一對一對應が存在することが分かる．

A の冪零元の集合（或いは A の**冪零根基**）$\mathfrak{N}$ とは，$\mathfrak{r}(0)$ に等しいイデヤルであり，A の凡ての素イデヤルの共通部分である (**0**, 1.1.1)．

系 (1.1.12)　— **位相空間**$\mathrm{Spec}(A)$ **と**$\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{N})$ **は標準的に同相である．**

命題 (1.1.13)　— $X = \mathrm{Spec}(A)$ **が既約**(**0**, 2.1.1) **である爲には，環** $A/\mathfrak{N}$ **が整域（或いは同じことと爲るが，**$\mathfrak{N}$ **は素イデヤル）であることが必要且つ充分である．**

系 (1.1.12) より，$\mathfrak{N} = (0)$ の場合に限つてよい．X が可約であれば，X の閉部分集合 Y_1, Y_2 が存在して，$X = Y_1 \cup Y_2$ と爲る．從つて $\mathfrak{j}(X) = \mathfrak{j}(Y_1) \cap \mathfrak{j}(Y_2) = (0)$ であり，$\mathfrak{j}(Y_1)$ 及び $\mathfrak{j}(Y_2)$ は (0) とは異なるイデヤルである (1.1.5)．ゆゑに A は整域ではない．逆に，A に $fg = 0$ と爲る元 $f \neq 0, g \neq 0$ が存在すれば,（A の素イデヤルの共通部分は (0) であるので）$V(f) \neq X, V(g) \neq X$ であり，$X = V(fg) = V(f) \cup V(g)$ と爲る．

系 (1.1.14)　— (i) $X = \mathrm{Spec}(A)$ **の閉部分集合と，自身の根と一致する** A **のイデヤルとの一對一對應に於て，**X **の既約閉部分集合は** A **の素イデヤルに對應する．殊に，**X **の既約成分は** A **の極小素イデヤルに對應する．**

(ii) **寫像** $x \mapsto \overline{\{x\}}$ **は** X **と** X **の既約閉部分集合との一對一對應を爲す（換言すれば，**X **の任意の既約閉部分集合は唯一つの生成點を有する）．**

(i) は (1.1.13) 及び (1.1.11) より直ちに歸結さる；(ii) を示す爲には，(1.1.11) より，X が既約である場合に限つてよい；此時，命題 (1.1.13) より，A には最小の素イデヤル $\mathfrak{R}$ が存在し，此れが X の生成點に對應する；更に X はコルモゴロフ空間であるので，唯一點より他の生成點は存在しない（(1.1.8) 及び (**0**, 2.1.3)）．

命題 (1.1.15) — $\mathscr{I}$ **が根基** $\mathfrak{R}(A)$ **に含まるる** A **のイデヤルであるとき，**$X = \mathrm{Spec}(A)$ **に於ける** $V(\mathscr{I})$ **の唯一つの近傍は空間** X **全體である．**

何と爲れば，定義より A の極大イデヤルは凡て $V(\mathscr{I})$ に屬する．任意の A のイデヤル $\mathfrak{a}$ は極大イデヤルに含まれるので，$V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathscr{I}) \neq \emptyset$ と爲り，從つて命題を得る．

1.2. 環の素スペクトルの函手性

(1.2.1) A, A' を環とし，

$$\varphi : A' \to A$$

を環の準同型寫像とする．任意の素イデヤル $x = \mathfrak{j}_x \in \mathrm{Spec}(A) = X$ に對して，環 $A'/\varphi^{-1}(\mathfrak{j}_x)$ は $A/\mathfrak{j}_x$ の部分環と標準的に同型であり，從つて整域と爲る．換言すれば $\varphi^{-1}(\mathfrak{j}_x)$ は A' の素イデヤルである；これを ${}^a\varphi(x)$ で表はし，斯くして寫像

$${}^a\varphi : X = \mathrm{Spec}(A) \to X' = \mathrm{Spec}(A')$$

（これはまた $\mathrm{Spec}(\varphi)$ で表はさる）が定義さる．これを準同型寫像 φ の**隨伴**寫像と稱す．剩餘を取り，φ より導かるる $A'/\varphi^{-1}(\mathfrak{j}_x)$ から $A/\mathfrak{j}_x$ への單寫準同型寫像を ${}^x\varphi$ で表はす．此れは體の單寫準同型寫像

$$\varphi^x : \boldsymbol{k}({}^a\varphi(x)) \to \boldsymbol{k}(x)$$

へと自然に延長さる；從つて定義より，任意の $f' \in A'$ に對して，

(1.2.1.1) $$\varphi^x(f'({}^a\varphi(x))) = (\varphi(f'))(x) \quad (x \in X)$$

と爲る．

命題 (1.2.2) — (i) A' **の任意の部分集合** E' **に對して，**

(1.2.2.1) $${}^a\varphi^{-1}(V(E')) = V(\varphi(E'))$$

と爲り，殊に任意の $f' \in A'$ **に對して**

(1.2.2.2) $${}^a\varphi^{-1}(D(f')) = D(\varphi(f'))$$

と爲る．

(ii) A **の任意のイデヤル** $\mathfrak{a}$ **に對して，**

(1.2.2.3) $$\overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{a}))} = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$$

と爲る．

何と爲れば，定義より ${}^a\varphi(x) \in V(E')$ は $E' \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{j}_x)$ に同値であり，從つて $\varphi(E') \subset \mathfrak{j}_x$ と爲る．最終的に $x \in V(\varphi(E'))$ と爲り，(i) が從ふ．(ii) を示す爲に，$\mathfrak{a}$ は自身の根に等しいイデヤルであると假定してよい．此れは $V(\mathfrak{r}(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a})$(1.1.2(v)) であることと，$\varphi^{-1}(\mathfrak{r}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{r}(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$ であることによる；$Y = V(\mathfrak{a})$ とおき，$\mathfrak{a}' = \mathfrak{j}({}^a\varphi(Y))$ とおくと，$\overline{{}^a\varphi(Y)} = V(\mathfrak{a}')$ と爲る (命題 (1.1.4(ii)))；定義より，$f' \in \mathfrak{a}'$ と爲る關係は任意の $x' \in {}^a\varphi(Y)$ に對して $f'(x') = 0$ と爲ることと同値である．公式 (1.2.1.1) より，此れはまた任意の $x \in Y$ に對して $\varphi(f')(x) = 0$ となることと同値である．さらに $\mathfrak{a}$ は自身の根に等しいイデヤルであるので，$\varphi(f') \in \mathfrak{j}(Y) = \mathfrak{a}$ と爲り，(ii) が從ふ．

系 (1.2.3)　— 寫像 ${}^a\varphi$ は連續である．

次のことに留意しやう．A'' を環とし，φ' を準同型寫像 $A'' \to A'$ とすると，${}^a(\varphi \circ \varphi') = {}^a\varphi \circ {}^a\varphi'$ と爲る；此結果と系 (1.2.3) は，$\mathrm{Spec}(A)$ が A に關して環の圏から位相空間の圏への**反變函手**であることを示す．

系 (1.2.4)　— φ **を，任意の** $f \in A$ **が** $f' = h\varphi(f')$ **と書かるる如きものであると假定する．此處で** h **は** A **に於ける可逆元であるとする（殊に** φ **が全寫である場合に此れは成立する）．此時** ${}^a\varphi$ **は** X **から** ${}^a\varphi(X)$ **の上への同相寫像である．**

任意の部分集合 $E \subset A$ に對して，$V(E) = V(\varphi(E'))$ と爲るやうな A' の部分集合 E' が存在することを示さう；公理 (T_0)(1.1.8) 及び公式 (1.2.2.1) を用ゐることにより，此れは先づ ${}^a\varphi$ が單寫であることを導き，次いで，再び (1.2.2.1) を用ゐることにより，${}^a\varphi$ が同相寫像であることを導く．さて，その爲には各 $f \in E$ に對して $h\varphi(f') = f$ と爲るやうな $f' \in A'$ を取れば充分である．此處で h は A に於ける可逆元である；此等の元 f' 達より爲る集合 E' が問ひに答えるものである．

(1.2.5)　殊に，φ が A から $A/\mathfrak{a}$ の上への標準的準同型寫像であるとき，(1.1.12) を思ひ出すと，${}^a\varphi$ は $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ と同一視さるる $V(\mathfrak{a})$ より $X = \mathrm{Spec}(A)$ への標準的入射である．(1.2.4) の他の特殊な場合は次を與へる：

系 (1.2.6)　— S **が** A **の乘法的部分集合であるとき，スペクトル**$\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ **は，**$\mathfrak{j}_x \cap S =$ **であるやうな** x **より爲る**$X = \mathrm{Spec}(A)$ **の部分空間と（位相と伴に）自然に同一視さる．**

何と爲れば，$S^{-1}A$ の素イデヤルは $\mathfrak{j}_x \cap S =$ と爲るイデヤル $S^{-1}j_x$ であり，$\mathfrak{j}_x = (i_A^S)^{-1}(S^{-1}j_x)$ であることが分かつてゐる (**0**,1.2.6)．從つて i_A^S に系 (1.2.4) を適用すれば充分である．

系 (1.2.7)　— ${}^a\varphi(X)$ **が** X' **に於て至る所稠密である爲には，核**$\mathrm{Ker}\,\varphi$ **の一切の元が冪零であることが必要且つ充分である．**

何と爲れば，公式 (1.2.2.3) をイデヤル (0) に適用すると，$\overline{{}^a\varphi(X)} = V(\ker\varphi)$ であることが分かり，$V(\mathrm{Ker}\,\varphi) = X'$ である爲には，$\mathrm{Ker}\,\varphi$ が A' の凡ての素イデヤルに含まるること，すなはち A' の冪零根 $\mathfrak{N}'$ に含まるることが必要充分である．

1.3. 加羣に同伴する層

(1.3.1) A を可換環とし，M を A-加羣，f を A の元，S_f を f^n $(n \geqslant 0)$ から爲る乘法的集合とする．$A_f = S_f^{-1}A$, $M_f = S_f^{-1}M$ とおくことを思ひ出しておかう．S'_f が S_f の元を割る $g \in A$ より爲る A の飽和乘法的部分集合であるとき，A_f 及び M_f は夫々S'^{-1}_f 及び $S'^{-1}_f M$ と自然に同一視さる $(\mathbf{0},1.4.3)$.

補題 (1.3.2) — 次の各條件は同値である：
a) $g \in S'_f$;　*b)* $S'_g \subset S'_f$;　*c)* $f \in \mathfrak{r}(g)$;　*d)* $\mathfrak{r}(f) \subset \mathfrak{r}(g)$;　*e)* $V(g) \subset V(f)$;
f) $D(f) \subset D(g)$

此れは定義及び (1.1.5) より直ちに歸結する．

(1.3.3) $D(f) = D(g)$ であるとき，補題 (1.3.2, b)) は $M_f = M_g$ であることを示す. さらに一般的に云ふと，$D(f) \supset D(g)$ であれば，$S'_f \subset S'_g$ 故，函手性を有する標準的準同型寫像

$$\rho_{g,f} : M_f \to M_g$$

が存在する $(\mathbf{0},1.4.1)$．$D(f) \supset D(g) \supset D(h)$ であるときには

(1.3.3.1) $$\rho_{h,g} \circ \rho_{g,f} = \rho_{h,f}$$

（$X = \mathrm{Spec}(A)$ 上で與へられたる x に對して）f が $A - \mathfrak{j}_x$ を走るとき，集合 S'_f 達は $A - \mathfrak{j}_x$ の部分集合より爲る增大フィルタア族を構成する．何と爲れば，$A - \mathfrak{j}_x$ の元 f, g に對して，S'_f 及び S'_g は S'_{fg} に包含さる；$f \in A - \mathfrak{j}_x$ に對して，S'_f の合併は $A - \mathfrak{j}_x$ であるので，A_x-加羣 M_x は準同型寫像の族 $(\rho_{g,f})$ に關する**歸納的極限** $\varinjlim M_f$ と自然に同一視さるることと爲る $(\mathbf{0},1.4.5)$．$f \in A - \mathfrak{j}_x$（或いは，同じことと爲るが $x \in D(f)$）に對する標準的準同型寫像を

$$\rho_x^f : M_f \to M_x$$

によつて表はす.

定義 (1.3.4) — 素スペクトル$X = \mathrm{Spec}(A)$ **の構造層**（resp. A**-加羣** M **に同伴する層**）**と稱し，**$\widetilde{A}$ **或いは**$\mathscr{O}_x$（resp. $\widetilde{M}$）**と記さるるところのものとは，**$f \in A$ **として** $D(f)$ **より爲る** X **の開基** $\mathfrak{B}$ **上の前層**$D(f) \to A_f$（resp. $D(f) \to M_f$）**に同伴する環**（resp. $\widetilde{A}$-**加羣**）**の層である**（(1.1.10)，$\mathbf{0}$,3.2.1 及び 3.5.6）.

$(\mathbf{0},3.2.4)$ で見たやうに纎維 $\widetilde{A_x}$（resp. $\widetilde{M_x}$）は環 A_x（resp. A_x-加羣 M_x）と同一視さる；

$$\theta_f : A_f \to \Gamma(D(f), \widetilde{A})$$

$$(\mathrm{resp.}\theta_f : M_f \to \Gamma(D(f), \widetilde{M}))$$

によつて標準的寫像を表はすと，任意の $x \in D(f)$ 及び任意の $\xi \in M_f$ に對して，

(1.3.4.1) $$(\theta_f(\xi))_x = \rho_x^f(\xi)$$

命題 (1.3.5) 　— **$\widetilde{M}$ は A-加羣の圏から $\widetilde{A}$-$\underline{\text{加羣}}$ の圏への M に關する共變函手である．**

M, N を A-加羣とし，u を準同型寫像 $M \to N$ とす；任意の $f \in A$ に對して，u には A_f-加羣 M_f から A_f-加羣 N_f への準同型寫像 u_f が自然に對應して,（$D(g) \subset D(f)$ に對して）次の圖式が可換と爲る ($\mathbf{0}$,1.4.1)；

$$\begin{tikzcd} M_f \arrow[r, "u_f"] \arrow[d, "\rho_{g,f}"'] & N_f \arrow[d, "\rho_{g,f}"] \\ M_g \arrow[r, "u_g"'] & N_g \end{tikzcd}$$

從つて此準同型寫像は $\widetilde{A}$-$\underline{\text{加羣}}$ の準同型寫像 $\widetilde{u} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ を定める ($\mathbf{0}$,3.2.3)．その上，任意の $x \in X$ に對して，$\widetilde{u_x}$ は $x \in D(f)$ $(f \in A)$ に對する u_f の歸納的極限であり，從つて $\widetilde{M_x}$ 及び $\widetilde{N_x}$ をそれぞれ M_x 及び N_x と自然に同一視するのであれば，$\widetilde{u_x}$ は u から自然に得らるる準同型寫像 u_x に同一視さる ($\mathbf{0}$,1.4.5)．P が A-加羣であり，v が準同型寫像 $N \to P$ で $w = v \circ u$ であれば，直ちに $w_x = v_x \circ u_x$ であり，從つて $\widetilde{w} = \widetilde{v} \circ \widetilde{u}$ である．以上により，A-加羣の圏より $\widetilde{A}$-$\underline{\text{加羣}}$ の圏への M に關する**共變函手**$\widetilde{M}$ が具合よく定義された．**此函手は完全である．** 何と爲れば，任意の $x \in X$ に對して，M_x は M に關する完全函手である ($\mathbf{0}$,1.3.2)；さらに，$\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(\widetilde{M})$ と爲る．此れは邊々の定義による ($\mathbf{0}$,1.7.1 及び 3.1.6).