# § 3.　層に關する補足

## 3.1.　圏に係数を有する層

**(3.1.1)**　$\mathbf{K}$ を圏とし，$(A_\alpha)_{\alpha\in I}$，$(A_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in I\times I}$ を $A_{\beta\alpha} = A_{\alpha\beta}$ と爲るやうな $\mathbf{K}$ の對象の族，$(\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in I\times I}$ を射 $\rho_{\alpha\beta} : A_\alpha \to A_{\alpha\beta}$ の族とする．$\mathbf{K}$ の對象 $A$ と射 $\rho_\alpha : A \to A_\alpha$ の族より爲る對が，$(A_\alpha)$，$(A_{\alpha\beta})$ 及び $(\rho_{\alpha\beta})$ が與へらるることにより定まる**普遍問題の解**であるとは，任意の $\mathbf{K}$ の對象 $B$ に對して $f \in \mathrm{Hom}(B, A)$ に $(\rho_\alpha \circ f) \in \prod_\alpha \mathrm{Hom}(B, A_\alpha)$ を對應せしめる寫像が，任意の添字對 $(\alpha, \beta) \in I \times I$ に對して $\rho_{\alpha\beta} \circ f_\alpha = \rho_{\beta\alpha} \circ f_\beta$ を充たす $(f_\alpha)$ より爲る集合上への**全單射**であるときを云ふ．普遍問題の解が存在するならば，同型を除いて一意であることが直ちに分かる．

**(3.1.2)**　位相空間 $X$ 上の $\mathbf{K}$ 係数**前層** $U \to \mathscr{F}(U)$ の定義 (G, I, 1.9) を此處では取り上げない；そのやうな前層が $\mathbf{K}$ **係数層**であるとは，次の公理を充たすときを云ふ．

(F)　**$U$ を $X$ の開集合とする．$U$ の任意の開被覆 $(U_\alpha)$ に對して，**$\rho_\alpha$（resp. $\rho_{\alpha\beta}$）**で制限射**

$$\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U_\alpha) \quad (\text{resp. } \mathscr{F}(U_\alpha) \to \mathscr{F}(U_\alpha \cap U_\beta))$$

**を表はすとき，$\mathscr{F}(U)$ と $(\rho_\alpha)$ より爲る對は，$(\mathscr{F}(U_\alpha))$，$(\mathscr{F}(U_\alpha \cap U_\beta))$ 及び $(\rho_{\alpha\beta})$ に對する普遍問題の解である**[1]．

此れは，$\mathbf{K}$ の任意の對象 $T$ に對して $U \to \mathrm{Hom}(T, \mathscr{F}(U))$ が**集合の層**であると云ふのと同じことと爲る．

**(3.1.3)**　$\Sigma$ を《射を伴ふ或る種の數學的構造》であるとし，$\mathbf{K}$ を $\Sigma$ より定義さるる圏であるとする．ゆゑに $\mathbf{K}$ の對象は $\Sigma$-構造を備へた集合であり，$\mathbf{K}$ の射は $\Sigma$-射である．更に圏 $\mathbf{K}$ は次の條件を充たすものとする．

(E)　$(A, (\rho_\alpha))$ が**圏 $\mathbf{K}$ に於いて** $(A_\alpha), (A_{\alpha\beta}), (\rho_{\alpha\beta})$ に對する普遍寫像問題の解であるとき，**集合の圏に於ても**（すなはち $A$，$A_\alpha$ 及び $A_{\alpha\beta}$ を集合と看做し，$\rho_\alpha$ 及び $\rho_{\alpha\beta}$ を集合の寫像と看做すときも）普遍寫像問題の解と爲つてゐる[2]．

此條件の下，$U \to \mathscr{F}(U)$ を**集合**の前層と看做すと，條件 (F) により此れは**層**である．更に寫像 $u : T \to \mathscr{F}(U)$ が $\mathbf{K}$ の射である爲には，(F) より各寫像 $\rho_\alpha \circ u$ が $\mathbf{K}$ の射 $T \to \mathscr{F}(U_\alpha)$ であることが必要充分である．此れは $\mathscr{F}(U)$ 上の $\Sigma$-構造が射 $\rho_\alpha$ に對する**原構造**と爲つてゐることを示す．逆に，$\mathbf{K}$ を係数とする $X$ 上の前層 $U \to \mathscr{F}(U)$ が**集合の層**であり，各寫像 $\rho_\alpha \circ u$ が $\mathbf{K}$ の射 $T \to \mathscr{F}(U_\alpha)$ であれば寫像 $u : T \to \mathscr{F}(U)$ は $\mathbf{K}$ の射であると云ふ條件が充たされてゐるものとする；此時 (F) が充たさるることは明白であり，從つて $U \to \mathscr{F}(U)$ は $\mathbf{K}$ **係数層**である．

**(3.1.4)**　$\Sigma$ が羣構造或いは環構造であるとき，$\mathbf{K}$ 係数前層 $U \to \mathscr{F}(U)$ が**集合の**層（(G)

---

[1] 此れは（フィルタ付でない）**射影極限**（(T, I.1.8) 及び序文にて紹介されし目下準備中の文獻を參照）を一般化した概念の特殊な場合である．

[2] 此條件の下では，標準的な函手 $\mathbf{K} \to (\mathrm{Ens})$ が（フィルタ付とは限らぬ）**射影極限と可換と爲る**ことも示され得る．

では羣或いは環の層と表現さる）であれば，**自動的にK 係数**層と爲る[1]．併し乍，例へば $\mathbf{K}$ が（連續表現を射とする）**位相環**の圏のときには，同様のことは成立しない：$\mathbf{K}$ 係数層 $U \to \mathscr{F}(U)$ は環の層であるが，任意の開集合 $U$ と $U$ の任意の開被覆 $(U_\alpha)$ に對して，環 $\mathscr{F}(U)$ の位相が充分に細かくない爲，表現 $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U_\alpha)$ が連續と爲らぬのである．此場合,（位相の入つてゐない）環の層と看做されたる $U \to \mathscr{F}(U)$ を位相環の層 $U \to \mathscr{F}(U)$ の**殼層**と云ふ．ゆゑに位相環の層の射 $u_V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{G}(V)$（$V$ は $X$ の任意の開集合）は殼層と爲る環の層の準同型寫像であつて，任意の開集合 $V$ に對して**連續**と爲るものである；殼層と爲る環の層の準同型寫像と區別する爲，位相環の層のときには**連續**準同型寫像と云ふ．位相空間或いは位相羣の層に對しても同様の定義及び語法を用ゐる．

**(3.1.5)** 任意の圏 $\mathbf{K}$ に對して，$\mathscr{F}$ が $X$ 上の $\mathbf{K}$ 係数前層（resp. 層）であり，$U$ が $X$ の開集合であるならば，任意の開集合 $V \subset U$ に對する $\mathscr{F}(V)$ が $\mathbf{K}$ 係数前層（resp. 層）を構成することは明らかである．此れを $\mathscr{F}$ による $U$ 上の**誘導**前層（resp. 誘導層）と稱し，$\mathscr{F}|U$ と記す．

$u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ を $X$ 上の $\mathbf{K}$ 係数前層の射とする．此時 $V \subset U$ に對して $u_V$ と爲る射 $\mathscr{F}|U \to \mathscr{G}|U$ を $u|U$ により表はす．

**(3.1.6)** 此處で，圏 $\mathbf{K}$ には**歸納極限**（T, 1.8）が恆に存在するものと假定する；$\mathscr{F}$ を $X$ 上の $\mathbf{K}$ 係数前層（或いは特に層）であるとし，$x \in X$ とする．$X$ に於ける $x$ の開近傍 $U$ の爲す（$\subset$ に關する）フィルタ付集合により射 $\rho_U^V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ の歸納極限と爲る $\mathbf{K}$ の對象を取ることが出來，此れを**纖維** $\mathscr{F}_x$ として定義する．$u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ が $\mathbf{K}$ 係数前層の射であるとき，任意の $x \in X$ に對して射 $u_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ を $x$ の開近傍の集合による $u_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ の歸納極限として定義する；斯くして $\mathscr{F}_x$ を，任意の $x$ に對して，$\mathscr{F}$ に關する $\mathbf{K}$ 係数の共變函手として定義する．

更に $\mathbf{K}$ が射を伴ふ或る種の數學的構造 $\Sigma$ によつて定められてゐるとき，$\mathscr{F}(U)$ の元を $\mathbf{K}$ 係数層 $\mathscr{F}$ の $U$ **上での断面**と稱し，$\mathscr{F}(U)$ に代わつて $\Gamma(U, \mathscr{F})$ と書く；$s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ であり，$V$ が $U$ に含まるる開集合であるとき，$\rho_V^U(s)$ に代わつて $s|V$ と書く；任意の $x \in U$ に對して，$s$ の $\mathscr{F}_x$ への標準的な像は點 $x$ に於ける $s$ の**芽**であり，$s_x$ と記す（$s(x)$ **と云ふ記號を此意味で用ゐることはなく**，此記號は本原論の (5.5.1) で考察さるる特殊な層に關する別な概念に對して用ゐらるるであらう）．

$u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ が $\mathbf{K}$ 係数層の射であるとき，任意の $s \in \Gamma(V, \mathscr{F})$ に對して，$u_V(s)$ に代わつて $u(s)$ と書く．

$\mathscr{F}$ が可換羣或いは環或いは加羣の層であるとき，$\mathscr{F}_x \neq 0$ と爲る $x \in X$ の集合を $\mathscr{F}$ の**臺**と云ひ，$\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ で表はす；此集合は $X$ に於て必ずしも閉でない．

$\mathbf{K}$ が射を伴ふ或る種の數學的構造により定められてゐるとき，$\mathbf{K}$ 係数層の**《エタル空間》の觀點による考察は徹底して行わない**；別な云ひ方をすれば，決して層を位相空間として考察することはせず（また纖維の合併集合と看做すこともせず），從つて $X$ 上の層の射 $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ を位相空間の連續寫像として考察することもない．

[1]此れは，圏 $\mathbf{K}$ に於て（集合の寫像として）**全單射**である任意の射が同型射と爲ることに起因する．例へば $\mathbf{K}$ が位相空間の圏であるときには，此れは正しくない．