§ 2. 既約空間・ネタア空間

2.1. 既約空間

(2.1.1)　位相空間 X が既約であるとは，$X \neq \emptyset$ 且つ X が異なる二つの閉部分空間の合併にはならぬときを云ふ．後者は次の何れとも同じに爲る．すなはち X の空でない二つの開集合（從つて有限個の開集合）の共通部分は空でない，或いは空でない任意の開集合は至る所稠密である，或いは X とは異なる任意の閉部分集合は疎である，或いは X の凡ての開集合は**連結**である．

(2.1.2)　位相空間 X の部分空間 Y が既約である爲には，Y の閉包である $\overline{Y}$ が既約であることが必要且つ十分である．殊に閉包 $\overline{x}$ は恆に既約である；$y \in \overline{x}$（同じことであるが，$\overline{y} \subset \overline{x}$）と爲る關係を，$y$ は x **の特殊化である**，或いは x は y **の一般化である**と云ひ表はす．既約空間 X 上に $X = \overline{x}$ と爲る點 x が存在するとき，x は X の**生成點**であると云ふ．此時 X の空でない任意の開集合は x を含み，x を含む任意の部分空間は x を生成點として有する．

(2.1.3)　次のことを想起しやう．すなはち以下の分離公理を充たす位相空間 X をコルモゴロフ空間と云ふ：

(T_0)　X から相違なる二點を任意に取ると，どちらか一方のみを含む開集合が存在する．

空でない開集合は凡ての生成點を含むので，既約コルモゴロフ空間が生成點を有するなら，それは唯一點のみである．

次のことを想起しやう．すなはち位相空間 X が**準コンパクト**であるとは，X の如何なる開被覆からでも，有限開被覆を選び出すことが出來るときを云ふ（或いは，同じことであるが，空でない閉集合の任意の減少フィルター族に於て，その共通部分は空でない）．X が準コンパクトであるとき，X の任意の閉部分集合 A は，空でない**極小**閉集合 M を含む．何と爲れば，A の空でない閉部分集合は，包含關係に關して歸納的である；更に，X がコルモゴロフ空間であれば，M はかならず一點のみから爲る（或いは語の濫用であるが，M は**閉點**であると云ふ）．

(2.1.4)　既約空間 X に於て，任意の空でない開部分空間 U は既約であり，X が生成點 x を有するなら，x は U の生成點でもある．

(U_α) を空でない開集合から爲る位相空間 X の被覆（從つて添字の集合は空でない）とする；X が既約である爲には，任意の α に對し U_α が既約であり，且つ任意の α, β に對して $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ と爲ることが必要且つ充分である．必要性は自明である；充分性を看る爲には，V を X の空でない開集合として，任意の α に對して $V \cap U_\alpha$ が空でないことを示せばよい．何と爲れば，此時任意の α に對して $V \cap U_\alpha$ は U_α で稠密であり，從つて V は X で稠密である．任意の α に對して $U_\alpha \cap U_\gamma \neq \emptyset$ であるので，また $V \cap U_\alpha \cap U_\gamma \neq \emptyset$ と爲る．

(2.1.5)　X を既約空間とし，f を X から位相空間 Y への連續寫像とする．此時 $f(X)$ は既約である．x を X の生成點とすると，$f(x)$ は $f(X)$ の生成點であり，從つてまた $\overline{f(X)}$

の生成點でもある．殊に，Y も既約で，唯一つの生成點 y を有するのであれば，$f(X)$ が至る所稠密である爲には，$f(x)=y$ であることが必要且つ充分である．

(2.1.6) 位相空間 X の任意の既約部分空間は**極大な**既約部分空間に含まれ，かならず閉と爲る．X の極大既約部分空間を X の**既約成分**と云ふ．Z_1，Z_2 を位相空間 X の異なる既約成分とすると，$Z_1 \cap Z_2$ は部分空間 Z_1，Z_2 の各々に於て**疎**な閉集合である；殊に，X の既約成分が生成點を有するとき (2.1.2)，その生成點は他の如何なる既約成分にも含まれない．X が**有限**個の既約成分 Z_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ のみから爲るとき，各々の i に對して，$U_i = \bigcup_{j \neq i} Z_j$ と置くと，U_i は開且つ既約で，互いに點を共有せず，その合併は X に於て稠密である．

U を位相空間 X の開部分集合とする．Z を U と點を共有する X の既約な部分集合とすると，$Z \cap U$ は Z に於て開且つ稠密であり，從つて既約である；逆に，U の任意の既約閉部分集合 Y に對して，Y の X に於ける閉包 $\overline{Y}$ は既約で，$\overline{Y} \cap U = Y$ である．結果，U の既約成分と U と點を共有する X の既約成分との間には**一對一の對應**が存在する．

(2.1.7) 位相空間 X を**有限**個の既約部分空間 Y_i の合併であるとすると，X の既約成分は Y_i の集合の極大元である．何と爲れば，Z を X の既約閉部分集合であるとすると，Z は $Z \cap Y_i$ の合併であり，此處から Z が Y_i のうちのどれか一つに含まれねばならぬと云ふ事が直ちに導かる．Y を位相空間 X の部分空間とし，Y は有限個の既約成分 Y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ のみから爲るものと假定する；此時 X での閉包 $\overline{Y_i}$ は $\overline{Y}$ の既約成分である．

(2.1.8) Y を唯一つの生成點 y を有する既約空間とする．X を位相空間とし，f を X から Y への連續寫像とする．此時 $f^{-1}(y)$ と點を共有する X の任意の既約成分 Z に對して，$f(Z)$ は Y で稠密である．此逆はかならずしも爲り立たない；にも關わらず，Z が生成點 z を有し，$f(Z)$ が Y に於て稠密であるなら，かならず $f(z)=y$ と爲る (2.1.5)；更に此時 $Z \cap f^{-1}(y)$ は $f^{-1}(y)$ の於ける $\{z\}$ 閉包であるので，從つて既約である．そして，z を含む $f^{-1}(y)$ の任意の既約部分集合はかならず Z に含まるるので，z は $Z \cap f^{-1}(y)$ の生成點である．$f^{-1}(y)$ の任意の既約成分 Z が生成點を有するとき，その既約成分の集合と $f^{-1}(y)$ の既約成分 $Z \cap f^{-1}(y)$ の間には**一對一の對應**があり，Z の生成點と $Z \cap f^{-1}(y)$ の生成點は同一のものである．

2.2. ネタア空間

(2.2.1) 位相空間 X の開集合族が**極大**條件を充たすとき，或いは同じことであるが，X の閉集合屬が**極小**條件を充たすとき，X は**ネタア**であると云ふ．任意の $x \in X$ に對して，ネタア部分空間である近傍が存在するとき，X は**局所ネタア**であると云ふ．

(2.2.2) E を**極小**條件を充たす順序集合とし，$\mathbf{P}$ を次の條件に從う，E の元に關する性質であるとする：$x < a$ と爲る任意の $x \in E$ に對して，$\mathbf{P}(a)$ が眞であるなら，$\mathbf{P}(a)$ もまた眞である．此條件の下，$\mathbf{P}(x)$ は任意の $x \in E$ **に對して眞である**（《數學的歸納法の原理》）．實際，$\mathbf{P}(x)$ が僞と爲る $x \in E$ の集合を F とする；F が空でないなら，F は極小元 a を有する．此時，任意の $x < a$ に對して $\mathbf{P}(x)$ は眞となるので，$\mathbf{P}(a)$ もまた眞となるが，此れは矛盾である．

我々は此原理を，特に E が**ネタア空間の閉部分集合の族**である場合に適用する．

(2.2.3)　ネタア空間の任意の部分空間はネタアである；逆に，ネタア部分空間の有限合併集合と爲る任意の位相空間はネタアである．

(2.2.4)　任意のネタア空間は準コンパクトである；逆に，凡ての開集合が準コンパクトである任意の位相空間はネタアである．

(2.2.5)　ネタア空間は**有限**個の既約成分のみより爲る．此れは數學的歸納法から分かる．