第 0 章 準備

§ 1. 分數環

1.0. 環と代數

(1.0.1) 此原論で考察の對象と爲る凡ての環は**單位元**を有するものである；そのやうな環上の任意の加羣は**單位的**であるものとする；環準同型寫像は恆に**單位元を單位元に移す**ものとする；斷りが無ければ，環 A の部分環は A **の單位元を含む**ものとする．殊に**可換な**環が考察さるるのであるが，何の斷りも無く環について議論してゐるときには，可換環が話題となつてゐることが言外に認められてゐる．若し A が必ずしも可換とは限らぬ環であれば，斷りの無い限り，A-加羣は**左**加羣であると考へる．

(1.0.2) A, B を其々可換とは限らぬ環とし，$\varphi : A \to B$ を準同型寫像とする．任意の左（resp. 右）B-加羣 M は，$a \cdot m = \varphi(a) \cdot m$ (resp. $m \cdot a = m \cdot \varphi(a)$) とおくことにより左（resp. 右）$A$-加羣と爲り得る；$M$ に於ける A-加羣と B-加羣の構造を區別する必要があるときには，上記のやうに定義されたる左（resp. 右）A-加羣を $M_{[\varphi]}$ によつて表はす．從つて L が A-加羣であれば，準同型寫像 $u : L \to M_{[\varphi]}$ は，$a \in A$，$x \in L$ に對して $u(a \cdot x) = \varphi(a) \cdot u(x)$ と爲るやうな可換羣の準同型寫像である；ゆゑに此れを **φ-準同型寫像**$L \to M$ と云ひ，對 (φ, u)（或いは語の濫用であるが，單に u）を (A, L) から (B, M) への**雙準同型寫像**と云ふ．此れにより環 A と A-加羣 L から爲る對 (A, L) は**圈**を爲し，その射は雙準同型寫像である．

(1.0.3) (1.0.2) の假定の下，$\mathfrak{J}$ が A の左（resp. 右）イデヤルであるとき，$\varphi(\mathfrak{J})$ により生成さるる B の左（resp. 右）イデヤル $B\varphi(\mathfrak{J})$（resp. $\varphi(\mathfrak{J})B$）を $B\mathfrak{J}$（resp. $\mathfrak{J}B$）によつて表はす；此れはまた左（resp. 右）B-加羣の標準的準同型寫像 $B \otimes_A \mathfrak{J} \to B$（resp. $\mathfrak{J} \otimes_A B \to B$）の像でもある．

(1.0.4) A が（可換）環であり，B が可換とは限らぬ環であるとき，B に A-**代數**の構造を與へることは，環準同型寫像 $\varphi : A \to B$ で $\varphi(A)$ が B の中心に含まるるやうなものを與へるに等しい．此時，任意の A のイデヤル $\mathfrak{J}$ に對して $\mathfrak{J}B = B\mathfrak{J}$ は B の兩側イデヤルであり，任意の B-加羣 M に對して $\mathfrak{J}M$ は $(B\mathfrak{J})M$ に等しい B-加羣である．

(1.0.5) **有限型加羣**と**有限型**可換**代數**の概念について再檢討するべきことは何もない；A-加羣 M が有限型であるとは，完全列 $A^p \to M \to 0$ が存在することを意味する．A-加羣 M が**有限表示**を有するとは，M が準同型寫像 $A^p \to A^q$ の餘核に同型である，換言すれば完全列 $A^p \to A^q \to M \to 0$ が存在するときを云ふ．留意すべきは，A が**ネタア**環ならば，任意の有限型 A-加羣は有限表示を有する．

次のことを想起しておかう．A-代數 B が A 上**整**であるとは，B の任意の元が A 係數單多項式の B に於ける根であるときを云ふ；此れは B の任意の元が**有限型 A-加羣**であ

る B の部分代數に含まるると云ふのと同じである．斯かるときに B が可換であれば，B の有限部分集合で生成さるる B の部分代數は有限型 A-加羣である；從つて可換代數 B が A 上整で且つ有限生成である爲には，B が有限型 A-加羣であることが必要充分である；また此時，B は**有限整な**（或いは語弊が無ければ單に，**有限** ）A-代數であると云ふ．此れ等の定義では，A-代數の構造を定める準同型寫像 $A \to B$ の單寫性は假定されて居らぬことが看て取れやう．

(1.0.6)　**整域**とは，零でない有限個の元の積が零には爲らぬ環である．此れは，$0 \neq 1$ であつて且つ零でない二つの元の積は零でないと云ふのと同じである．環 A の**素**イデヤルとは，イデヤル $\mathfrak{p}$ であつて $A/\mathfrak{p}$ が整域と爲るものである；從つて $\mathfrak{p} \neq A$ が導かる．環 A が少なくも一つの素イデヤルを有する爲には，$A \neq \{0\}$ であることが必要且つ充分である．

(1.0.7)　**局所**環とは，唯一つの極大イデヤルが存在する環 A である．その極大イデヤルは可逆元全體の補集合であつて，A の凡てのイデヤルを含む．A，B が局所環であり，$\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{n}$ を其々の極大イデヤルとするとき，準同型寫像 $\varphi : A \to B$ が**局所的**であるとは，$\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$（或いは同じことであるが，$\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$）と爲るときを云ふ．斯かるとき，そのやうな準同型寫像は剩餘を取ることにより剩餘體 $A/\mathfrak{m}$ から剩餘體 $B/\mathfrak{n}$ への單寫準同型寫像を定める．二つの局所準同型寫像の合成は局所準同型寫像である．

1.1. イデヤルの根・環の冪零根基と根基

(1.1.1)　$\mathfrak{a}$ を環 A のイデヤルとする；$\mathfrak{a}$ の**根**とは，或る整數 $n > 0$ に對し，$x^n \in \mathfrak{a}$ と爲る $x \in A$ の集合であり，$\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ と記す；此れは $\mathfrak{a}$ を含むイデヤルである．$\mathfrak{r}(\mathfrak{r}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$；$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ ならば $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{b})$ である；有限個のイデヤルの共通部分の根は，其々のイデヤルの根の共通部分である；φ が環 A' から A への準同型寫像であるなら，任意のイデヤル $\mathfrak{a} \subset A$ に對し $\mathfrak{r}(\varphi^{-1}(\mathfrak{a})) = \varphi^{-1}(\mathfrak{r}(\mathfrak{a}))$ と爲る．或るイデヤルがイデヤルの根である爲には，素イデヤルの共通部分であることが必要且つ充分である．イデヤル $\mathfrak{a}$ の根は $\mathfrak{a}$ を含む**極小**素イデヤルの共通部分である；A がネタアであるなら，そのやうな素イデヤルは有限個である．

またイデヤル (0) の根を A の**冪零根基**と稱す；此れは A の冪零元の集合 $\mathfrak{N}$ である．$\mathfrak{N} = (0)$ なら，A は**被約**であると云ふ；任意の環 A に對し，冪零根基による A の剩餘環 $A/\mathfrak{N}$ は被約環である．

(1.1.2)　次のことを想起しやう．(可換とは限らぬ）環 A の**根基**$\mathfrak{R}(A)$ とは，A の極大左イデヤルの共通部分である（此れはまた極大右イデヤルの共通部分でもある）．$A/\mathfrak{R}(\mathrm{A})$ の根基は (0) である．

1.2. 分數加羣と分數環

(1.2.1)　環 A の部分集合 S に對し，$1 \in S$ で，S の二つの元の積がまた S に含まるるとき，S は**乘法的**であると云ふ．次に擧げる例がとりわけ肝要である：

1°　$f \in A$ の冪 f^n $(n \geq 0)$ の集合 S_f；　2°　A の**素**イデヤル $\mathfrak{p}$ の補集合 $A - \mathfrak{p}$.

(1.2.2)　S を環 A の乘法的部分集合とし，M を A-加羣とする；集合 $M \times S$ に於て，對 (m_1, s_1) と (m_2, s_2) の次のやうな關係は同値關係である：

$$s(s_1 m_2 - s_2 m_1) = 0 \text{ と爲る } s \in S \text{ が存在する}$$

斯かる關係による $M \times S$ の商集合を $S^{-1}M$ で表はし，對 (m, s) の $S^{-1}M$ への自然な像を m/s で表はす．寫像 $i_M^S : m \mapsto m/1$（或いは i^Sで表はす）を，M から $S^{-1}M$ への**標準的**寫像と稱す．斯かる寫像は一般に單寫でも全寫でも無い；その核は，$sm = 0$ と爲る $s \in S$ が存在するやうな $m \in M$ の集合である．

$S^{-1}M$ に次のやうにして羣の加法演算を定める（實際 $S^{-1}M$ の代表元の取り方に依らぬことが確めらる）.

$$(m_1/s_1) + (m_2/s_2) = (s_2 m_1 + s_1 m_2)/(s_1 s_2)$$

$S^{-1}A$ であれば，更に $(a_1/s_1)(a_2/s_2) = (a_1 a_2)/(s_1 s_2)$ とすることにより乘法演算が定まり，また $(a/s)(m/s') = (am)/(ss')$ と置くことによつて $S^{-1}A$ の $S^{-1}M$ への作用が定まる．此時，$S^{-1}A$ は環と爲り（**S に分母を有する A の分數環と云ふ**），$S^{-1}M$ は $S^{-1}A$-加羣と爲る（**S に分母を有する分數加羣と云ふ**）; 任意の $s \in S$ に對し，$s/1$ は $S^{-1}A$ に於て可逆であり，その逆元は $1/s$ である．標準的寫像 i_A^S は環準同型寫像である（或いは i_M^S であれば $S^{-1}M$ を準同型寫像 $i_A^S : A \to S^{-1}A$ により A-加羣と看做したときの A-加羣の準同型寫像である）.

(1.2.3)　$f \in A$ に對し $S_f = \{f^n\}_{n \geqslant 0}$ であるなら，$S_f^{-1}A$ 及び $S_f^{-1}M$ の代わりに其々 A_f，M_f と書く；A_f を A 上の代數と看做して，$A_f = A[1/f]$ と書いてよい．A_f は剩餘代數 $A[T]/(fT-1)A[T]$ に同型である．$f = 1$ であるとき，A_f 及び M_f は其々A，M と自然に同型である；f が冪零元であるなら，A_f 及び M_f は 0 となる．

$\mathfrak{p}$ を A の素イデヤルとして $S = A - \mathfrak{p}$ であるとき，$S^{-1}A$ 及び $S^{-1}M$ の代わりに其々 $A_\mathfrak{p}$，$M_\mathfrak{p}$ と書く；$A_\mathfrak{p}$ は**局所環**で，その極大イデヤル $\mathfrak{q}$ は $i_A^S(\mathfrak{p})$ により生成さる．また $(i_A^S)^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ と爲る．剩餘を取ることによつて，i_A^S は整域 $A/\mathfrak{p}$ から體 $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ への單寫準同型寫像を與へ，$A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ は $A/\mathfrak{p}$ の分數體と同一視さる．

(1.2.4)　分數環 $S^{-1}A$ と標準的準同型寫像 i_A^S は**普遍寫像問題**の解と爲つてゐる：A から B への準同型寫像 u で，$u(S)$ が B の**可逆**元から爲るものは次のやうに一意に分解する．

$$u : A \xrightarrow{i_A^S} S^{-1}A \xrightarrow{u^*} B$$

但し，u^* は環準同型寫像である．同じ假定の下，M を A-加羣，N を B-加羣，$v : M \to N$ を A-加羣の準同型寫像とする（N 上の A-加羣の構造は $u : A \to B$ により定めらる）; 此時 v は次のやうに一意に分解する．

$$v : M \xrightarrow{i_M^S} S^{-1}M \xrightarrow{v^*} N$$

但し，v^* は $S^{-1}A$-加羣の準同型寫像である（N 上の $S^{-1}A$-加羣の構造は u^* により定めらる）.

(1.2.5)　$(a/s)\otimes m$ を $(am)/s$ に對應せしめることにより $S^{-1}A$-加羣の標準的同型寫像 $S^{-1}A\otimes_A M \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$ を定める．此れの逆寫像は m/s を $(1/s)\otimes m$ に移す.

(1.2.6)　$S^{-1}A$ の任意のイデヤル $\mathfrak{a}'$ に對し，$\mathfrak{a}=(i_A^S)^{-1}(\mathfrak{a}')$ は A のイデヤルである．此時，$\mathfrak{a}'$ は $i_A^S(\mathfrak{a})$ によつて生成さるる $S^{-1}A$ のイデヤルであり，$S^{-1}\mathfrak{a}$ (1.3.2) と同一視さる．寫像 $\mathfrak{p}'\mapsto(i_A^S)^{-1}(\mathfrak{p}')$ は $S^{-1}A$ の**素**イデヤルの集合から $\mathfrak{p}\cap S=\emptyset$ と爲る A の素イデヤル $\mathfrak{p}$ の集合への，包含關係による順序構造を保つ同型寫像である．更に此時 $A_\mathfrak{p}$ と $(S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$ は標準的に (1.5.1) 同型と爲る.

(1.2.7)　A が**整域**であり，その分數體を K で表はすとき，0 を含まない任意の乘法的部分集合 S に對し，標準的寫像 $i_A^S: A\to S^{-1}A$ は單寫であり，從つて $S^{-1}A$ は A を含む K の部分環と自然に同一視さる．殊に A の任意の素イデヤル $\mathfrak{p}$ に對し，$A_\mathfrak{p}$ は A を含む局所環である．その極大イデヤルは $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ であり，$\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}\cap A=\mathfrak{p}$ と爲る.

(1.2.8)　A が**被約**環なら，$S^{-1}A$ も同じく被約環である：何と爲れば $x\in A, s\in S$ に對し $(x/s)^n=0$ なら，此れは $s'x^n=0$ と爲る $s'\in S$ が存在し，$(s'x)^n=0$ と爲ることを示すが，假定により $s'x=0$ すなはち $x/s=0$ と爲る.

1.3. 函手性

(1.3.1)　M,N を其々A-加羣とし，u を A-準同型寫像 $M\to N$ とする．S が A の乘法的部分集合であるとき，$S^{-1}u$ と記さるる $S^{-1}A$-準同型寫像 $S^{-1}M\to S^{-1}N$ を $(S^{-1}u)(m/s)=u(m)/s$ と置くことにより定める；$S^{-1}M$ 及び $S^{-1}N$ 其々の $S^{-1}A\otimes_A M$ 及び $S^{-1}A\otimes_A N$ との標準的な同一視 (1.2.5) により，$S^{-1}u$ は $1\otimes u$ と同一視さる．さらに P を別な加羣とし，v を A-準同型寫像 $N\to P$ とすると，$S^{-1}(v\circ u)=(S^{-1}v)\circ(S^{-1}u)$ と爲る；換言すれば $S^{-1}M$ は A-加羣の圏から $S^{-1}A$-加羣（A と S は固定さる）の圏への M に關する**共變函手**である.

(1.3.2)　函手 $S^{-1}M$ は**完全**である；すなはち，

$$M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$$

が完全なら，

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}u} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}v} S^{-1}P$$

も完全である.

殊に $u: M\to N$ が單寫（resp. 全寫）であるなら $S^{-1}u$ も單寫（resp. 全寫）である；N 及び P が其々M の部分加羣であり，$S^{-1}N$ と $S^{-1}P$ を自然に $S^{-1}M$ の部分加羣と看做すとき，

$$S^{-1}(N+\mathrm{P})=S^{-1}N+S^{-1}P \text{ 及び } S^{-1}(N\cap \mathrm{P})=(S^{-1}N)\cap(S^{-1}P)$$

が爲り立つ．

(1.3.3)　$(M_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ を A-加羣の歸納系とする；此時 $(S^{-1}M_\alpha,\, S^{-1}\varphi_{\beta\alpha})$ は $S^{-1}A$-加羣の歸納系である．$S^{-1}M_\alpha$ 及び $S^{-1}\varphi_{\beta\alpha}$ をテンソル積 (1.2.5 及び 1.3.1) で表現し，テンソル積を取ることと歸納極限を取ることとが可換であることを用ゐると次の標準的同型寫像を得る．

$$S^{-1}\varinjlim M_\alpha \xrightarrow{\sim} \varinjlim S^{-1}M_\alpha$$

此れはまた（M に關する）函手 $S^{-1}M$ が**歸納極限と可換である**と云ひ表はさる．

(1.3.4)　M, N を其々A-加羣とする；此時（M 及び N に關して）**函手性を有する**次の標準的同型寫像が存在する．

$$(S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}N) \xrightarrow{\sim} S^{-1}(M \otimes_A N)$$

此れは $(m/s) \otimes (n/t)$ を $(m \otimes n)/st$ に移す．

(1.3.5)　同様に（M 及び N に關して）**函手性を有する**準同型寫像

$$S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

が，u/s に準同型寫像 $m/t \mapsto u(m)/st$ を對應せしめることにより得らる．M が**有限表示**を有するとき，件の準同型寫像は**同型寫像**である：M が A^r であるときは直ちに従う．一般の場合は，完全列 $A^p \to A^q \to A \to 0$ に分解し，M に關する函手 $S^{-1}M$ の完全性と函手 $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ の左完全性を用ゐて上に歸着せしめる．A が**ネタア**で，A-加羣 M が**有限型**であるときは恆に斯くあることに留意せよ．

1.4. 乘法的部分集合の變換

(1.4.1)　S, T を $S \subset T$ と爲るやうな環 A の乘法的部分集合とせよ；此時 $S^{-1}A$ から $T^{-1}A$ への標準的準同型寫像 $\rho_A^{T,S}$（或いは單に $\rho^{T,S}$）が存在する．此れは $S^{-1}A$ に於て a/s で表はさるる元を $T^{-1}A$ に於て a/s で表はさるる元に對應せしめる；従つて $i_A^T = \rho_A^{T,S} \circ i_A^S$ を得る．同様にして任意の A-加羣 M に對して，$S^{-1}M$ から $T^{-1}M$（$T^{-1}M$ は $\rho_A^{T,S}$ により $S^{-1}A$-加羣と看做す）への $S^{-1}A$-準同型寫像が存在する．此れは $T^{-1}M$ の元 m/s を $S^{-1}M$ の元 m/s に對應せしめる；此寫像を $\rho_M^{T,S}$，或いは單に $\rho^{T,S}$ と表はし，矢張り $i_M^T = \rho_M^{T,S} \circ i_M^S$ を得る．標準的な同一視 (1.2.5) により，$\rho_M^{T,S}$ は $\rho_A^{T,S} \otimes 1$ と同一視さる．準同型寫像 $\rho_M^{T,S}$ は函手 $S^{-1}M$ から函手 $T^{-1}M$ への**函手の射**（或いは自然變換）である．換言すれば，任意の準同型寫像 $u : M \to N$ に對して次の圖式が可換である；

$$\begin{tikzcd}
S^{-1}M \arrow[r, "S^{-1}u"] \arrow[d, "\rho_M^{T,S}"'] & S^{-1}N \arrow[d, "\rho_N^{T,S}"] \\
T^{-1}M \arrow[r, "T^{-1}u"] & T^{-1}N
\end{tikzcd}$$

更に $T^{-1}u$ は $S^{-1}u$ により完全に決定さる．何と爲れば，$m \in M$，$t \in S$ に對して

$$(T^{-1}u)(m/t) = (t/1)^{-1}\rho^{T,S}((S^{-1}u)(m/1))$$

と爲る．

(1.4.2)　同じ記號の下，A-加羣 M, N に對して次の圖式（(1.3.4) 及び (1.3.5) を參照）が可換である．

$$\begin{tikzcd}
(S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}N) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & S^{-1}(M \otimes_A N) \arrow[d] \\
(T^{-1}M) \otimes_{T^{-1}A} (T^{-1}N) \arrow[r, "\sim"] & T^{-1}(M \otimes_A N)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M,N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \arrow[d] \\
T^{-1}\mathrm{Hom}_A(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{T^{-1}A}(T^{-1}M, T^{-1}N)
\end{tikzcd}$$

(1.4.3)　準同型寫像 $\rho^{T,S}$ が**全單寫**に爲るとき，すなはち T の任意の元が S の元の因子と爲るときは肝要である；此時は $\rho^{T,S}$ により加羣 $S^{-1}M$ と $T^{-1}M$ を同一視する．S の元の A に於ける凡ての因子が S に含まるるとき，S は**飽和**であると云ふ．S を，S の元の凡ての因子より爲る集合 T（此れは乘法的且つ飽和である）で置き換えることにより，望むのであれば，S が飽和である場合に制限して $S^{-1}M$ を考察してもよいことが分かる．

(1.4.4)　S, T, U が $S \subset T \subset U$ と爲るやうな A の乘法的部分集合であるなら，

$$\rho^{U,S} = \rho^{U,T} \circ \rho^{T,S}$$

と爲る．

(1.4.5)　A の乘法的部分集合の**增大フィルタア族** (S_α)（$S_\alpha \subset S_\beta$ に對して $\alpha \leqslant \beta$ と記す）を考察する．S を乘法的部分集合 $\bigcup_\alpha S_\alpha$ とする；$\alpha \leqslant \beta$ に對して $\rho_{\beta\alpha} = \rho_A^{S_\beta, S_\alpha}$ と置く；(1.4.4) より，準同型寫像 $\rho_{\beta\alpha}$ は環の歸納系 $(S_\alpha^{-1}A, \rho_{\beta\alpha})$ の**歸納極限**である環 A' を定める．ρ_α を標準的寫像 $S_\alpha^{-1}A \to A'$ とし，$\varphi_\alpha = \rho_A^{S,S_\alpha}$ と置く；(1.4.4) より $\alpha \leqslant \beta$ に對して $\varphi_\alpha = \varphi_\beta \circ \rho_{\beta\alpha}$ と爲るので，以下の圖式が可換と爲るやうな準同型寫像 $\varphi : A' \to S^{-1}A$ を一意的に定めることが出來る．

$$\begin{tikzcd}
 & S_\alpha^{-1}A \arrow[dl, "\rho^\alpha"'] \arrow[d, "\rho_{\beta\alpha}"] \arrow[dr, "\varphi\alpha"] & \\
 & S_\beta^{-1}A \arrow[dl, "\rho^\beta"] \arrow[dr, "\varphi\beta"'] & \\
A' \arrow[rr, "\varphi"'] & & S^{-1}A
\end{tikzcd} \qquad (\alpha \leqslant \beta)$$

實際 φ は**同型寫像**である：何と爲れば，φ が全寫であることは構成法により直ちに從ふ．一方，$\rho_\alpha(a/s_\alpha) \in A'$ が $\varphi(\rho_\alpha(a/s_\alpha)) = 0$ と爲るやうなものであれば，此れは $S^{-1}A$ に於て $a/s_\alpha = 0$ と爲ること，すなはち $sa = 0$ と爲るやうな $s \in S$ の存在を意味する；併し $s \in S_\beta$ と爲るやうな $\beta \geqslant \alpha$ が存在するので，$\rho_\alpha(a/s_\alpha) = \rho_\beta(sa/ss_\alpha) = 0$ と爲り，φ

が單寫であることが分かる．A-加羣 M の場合も同樣に論じることが出來，斯くして次の同型寫像を得る．

$$\varinjlim S_\alpha^{-1}A \xrightarrow{\sim} (\varinjlim S_\alpha)^{-1}A, \quad \varinjlim S_\alpha^{-1}M \xrightarrow{\sim} (\varinjlim S_\alpha)^{-1}M$$

後者の式は M に關して**凾手性**を有する．

(1.4.6)　S_1, S_2 を其々A の乘法的部分集合とせよ；此時 S_1S_2 もまた A の乘法的部分集合である．環 $S_1^{-1}A$ に於ける S_2 の標準的な像を S_2' で表はす．${S'}_2$ は環 $S_1^{-1}A$ の乘法的部分集合である．任意の A-加羣 M に對して，次の凾手性を有する同型寫像が存在する．

$${S'}_2^{-1}(S_1^{-1}M) \xrightarrow{\sim} (S_1S_2)^{-1}M$$

此れは $m/(s_1s_2)$ を $(m/s_1)/(s_2/1)$ に對應せしめる．

1.5. 環の變換

(1.5.1)　A, A' を環，φ を準同型寫像 $A' \to A$ とし，S, S' を $\varphi(S') \subset S$ と爲るやうな，A, A' の乘法的部分集合とする；準同型寫像の合成 $A' \xrightarrow{\varphi} A \to S^{-1}A$ は，(1.2.4) により $A' \to S'^{-1}A' \xrightarrow{\varphi^{S'}} S^{-1}A$ と分解さる；$\varphi^{S'}(a'/s') = \varphi(a')/\varphi(s')$ である．$A = \varphi(A')$ 且つ $S = \varphi(S')$ ならば $\varphi^{S'}$ は**全寫**と爲り，$A' = A$ で φ が恆等寫像であるならば $\varphi^{S'}$ は (1.4.1) で定義された準同型寫像 $\rho_A^{S,S'}$ に他ならない．

(1.5.2)　(1.5.1) の假定の下，M を A-加羣とする．次のやうな凾手性を有する $S'^{-1}A'$-加羣の標準的準同型寫像が存在する．

$$\sigma : S'^{-1}(M_{[\varphi]}) \to (S^{-1}M)_{[\varphi^{S'}]}$$

此れは，$(S^{-1}M)_{[\varphi^{S'}]}$ の元 $m/\varphi(s')$ を ${S'}^{-1}(M_{[\varphi]})$ の元 m/s' に對應せしめる；此れが代表元の取り方に依らないことは直ちに確認さる．$S = \varphi(S')$ **のとき**，準同型寫像 σ は**全單寫**である．$A' = A$ で φ が恆等寫像であるとき，σ は (1.4.1) で定義されたる準同型寫像 $\rho_M^{S,S'}$ に他ならない．

特に $M = A$ とすると，準同型寫像 φ は A 上に A'-代數の構造を定める；此時 ${S'}^{-1}(A_{[\varphi]})$ は $(\varphi(S'))^{-1}A$ と同型な環であり，準同型寫像 $\sigma : {S'}^{-1}(A_{[\varphi]}) \to S^{-1}A$ は $S'^{-1}A'$-代數の準同型寫像である．

(1.5.3)　M 及び N を其々A-加羣とする；(1.3.4) 及び (1.5.2) で定義されたる準同型寫像を合成して，次の準同型寫像を得る．

$$(S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N)_{[\varphi^{S'}]} \leftarrow {S'}^{-1}((M \otimes_A N)_{[\varphi]})$$

$\varphi(S') = S$ であるとき，此れは同型寫像と爲る．同樣に，(1.3.5) 及び (1.5.2) で定義されたる準同型寫像を合成して，次の準同型寫像を得る．

$${S'}^{-1}((\mathrm{Hom}_A(M,N))_{[\varphi]}) \to (\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N))_{[\varphi]^{S'}}$$

$\varphi(S')=S$ で，M が有限表示を有するとき，此れは同型寫像となる．

(1.5.4)　次に A'-加羣 N' 及びテンソル積 $N'\otimes_{A'}A_{[\varphi]}$ を考察する．此テンソル積は $a\cdot(n'\otimes b)=n'\otimes(ab)$ と置くことで A-加羣と看做すことが出來る．次の凾手性を有する $S^{-1}A$-加羣の同型寫像が存在する．

$$\tau:(S'^{-1}N')\otimes_{S'^{-1}A'}(S^{-1}A)_{[\varphi^{S'}]}\xrightarrow{\sim}S^{-1}(N'\otimes_{A'}A_{[\varphi]})$$

此れは $(n'\otimes a)/(\varphi(s')s)$ を $(n'/s')\otimes(a/s)$ に對應せしめる；何と爲れば n'/s' 或いは a/s を其々別な代表元と取り換えて，$(n'\otimes a)/(\varphi(s')s)$ が變わらないことが分かる；更に，$(n'\otimes a)/s$ に $(n'/1)\otimes(s/a)$ を對應せしめることで τ の逆寫像を定めることが出來る：此れには，$S^{-1}(N'\otimes_{A'}A_{[\varphi]})$ が自然に $(N'\otimes_{A'}A_{[\varphi]})\otimes_A S^{-1}A$ と同型 (1.2.5) に爲ることにより $N'\otimes_{A'}(S^{-1}A)_{[\psi]}$ とも自然に同型と爲ることを用ゐる．此處で，ψ は A' から $S^{-1}A$ への準同型寫像 $a'\mapsto\varphi(a')/1$ を表はす.

(1.5.5)　M' 及び N' を A'-加羣とする．此時，同型寫像 (1.3.4) と (1.5.4) を合成して．次の同型寫像を得る．

$$S'^{-1}M'\otimes_{S'^{-1}A'}S'^{-1}N'\otimes_{S'^{-1}A'}S^{-1}A\xrightarrow{\sim}S^{-1}(M'\otimes_{A'}N'\otimes_{A'}A)$$

同様に，M' が有限表示を有するのであれば，(1.3.5) と (1.5.4) より次の同型寫像を得る．

$$\mathrm{Hom}_{S'^{-1}A'}(S'^{-1}M',S'^{-1}N')\otimes_{S'^{-1}A'}S^{-1}A\xrightarrow{\sim}S^{-1}(\mathrm{Hom}_{A'}(M',N')\otimes_{A'}A)$$

(1.5.6)　(1.5.1) の假定の下，T 及び T' を其々A，A' の乘法的部分集合とし，$S\subset T$，$S'\subset T'$ そして $\varphi(T')\subset T$ と爲るやうなものとする．此時次の圖式は可換である．

$$\begin{CD}
S'^{-1}A' @>{\varphi^{S'}}>> S^{-1}A\\
@V{\rho^{T',S'}}VV @VV{\rho^{T,S}}V\\
T'^{-1}A' @>>{\varphi^{T'}}> T^{-1}A
\end{CD}$$

M が A-加羣であれば，次の圖式が可換である．

$$\begin{CD}
S'^{-1}(M_{[\varphi]}) @>{\sigma}>> (S^{-1}M)_{[\varphi^{S'}]}\\
@V{\rho^{T',S'}}VV @VV{\rho^{T,S}}V\\
T'^{-1}(M_{[\varphi]}) @>{\sigma}>> (T^{-1}M)_{[\varphi^{S'}]}
\end{CD}$$

最後に，N' が A'-加羣であれば，次の圖式が可換である．

$$\begin{CD}
(S'^{-1}N')\otimes_{S'^{-1}A'}(S^{-1}A)_{[\varphi^{S'}]} @>{\tau}>{\sim}> S^{-1}(N'\otimes_{A'}A_{[\varphi]})\\
@VVV @VV{\rho^{T,S}}V\\
(T'^{-1}N')\otimes_{T'^{-1}A'}(T^{-1}A)_{[\varphi^{T'}]} @>{\tau}>{\sim}> S^{-1}(N'\otimes_{A'}A_{[\varphi]})
\end{CD}$$

此可換圖式の，左の縱の矢印は，$\rho_{N'}^{T',S'}$ を $S'^{-1}N'$ に，$\rho_A^{T,S}$ を $S^{-1}A$ に作用させることで得らる．

(1.5.7)　A'' を別な環とし，$\varphi' : A'' \to A'$ を環準同型写像，S'' を $\varphi'(S'') \subset S'$ と爲る A'' の乘法的部分集合とする．$\varphi'' = \varphi \circ \varphi'$ と置く；此時

$$\varphi''^{S''} = \varphi^{S'} \circ \varphi'^{S''}$$

と爲る．M を A-加羣とする；$M_{[\varphi'']} = (M_{[\varphi]})_{[\varphi']}$ と爲るのは明らかである；(1.5.2) で σ が φ から定められたのと同様，準同型写像 σ' 及び σ'' が其々φ' 及び φ'' から定められたものとすると，次の推移律が爲り立つ．

$$\sigma'' = \sigma \circ \sigma'$$

最後に，N'' を A''-加羣とする；A-加羣 $N'' \otimes_{A''} A_{[\varphi'']}$ は $(N'' \otimes_{A''} A'_{[\varphi']}) \otimes_{A'} A_{[\varphi]}$ と自然に同一視され，同様に，$S^{-1}A$-加羣 $(S''^{-1}N'') \otimes_{S''^{-1}A''} (S^{-1}A)_{[\varphi''^{S''}]}$ は

$$(S''^{-1}N'') \otimes_{S''^{-1}A''} (S'^{-1}A')_{[\varphi'^{S''}]} \otimes_{S'^{-1}A'} (S^{-1}A)_{[\varphi^{S'}]}$$

と自然に同一視さる．此同一視の元，τ が (1.5.4) で φ から定められたのと同様，同型写像 τ' 及び τ'' が其々φ' 及び φ'' から定められたものとすると，次の推移律が爲り立つ．

$$\tau'' = \tau \circ (\tau' \otimes 1)$$

(1.5.8)　A を B の部分環とする；A の任意の**極小**素イデヤル $\mathfrak{p}$ に對し，B の極小素イデヤル $\mathfrak{q}$ で，$\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{q}$ と爲るものが存在する．何と爲れば，$A_{\mathfrak{p}}$ は $B_{\mathfrak{p}}$ の部分環 (1.3.2) で，**唯一つ**の素イデヤル $\mathfrak{p}'$ を有する (1.2.6)；$B_{\mathfrak{p}}$ は 0 に爲らないので，少なくも一つの素イデヤル $\mathfrak{q}'$ を有し，$\mathfrak{q}' \cap A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}'$ と爲らねばならない；從つて B の素イデヤル $\mathfrak{q}_1$ を $\mathfrak{q}'$ の逆像とすると $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}$ であり，云ふまでも無く，$\mathfrak{q}_1$ に含まるる B の任意の極小素イデヤル $\mathfrak{q}$ に對し $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ と爲る．

1.6. 歸納極限としての加羣 M_f

(1.6.1)　M を A-加羣とし，f を A の元とする．A-加羣の族 (M_n) を考察する．任意の M_n は M に同型であり，$m \leqslant n$ と爲る整數に對して，φ_{nm} を M_m から M_n への準同型写像 $z \mapsto f^{n-m}z$ とする；$((M_n),(\varphi_{nm}))$ が**歸納系**と爲ることは直ちに分かる；$N = \varinjlim M_n$ を此歸納系の歸納極限とする．此時，**函手性を有する**N から M_f への標準的な A-同型写像が定まる．此れに關して，次のことに留意せよ．すなはち，各 n に對して $\theta_n : z \mapsto z/f^n$ は $M = M_n$ から M_f への準同型写像であり，定義により $m \leqslant n$ に對し，$\theta_n \circ \theta_{nm} = \theta_m$ と爲る．從つて，A-準同型写像 $\theta : N \to M_f$ が存在し，φ_n を標準的準同型写像 $M_n \to N$ とすると，任意の n に對して $\theta_n = \theta \circ \varphi_n$ と爲る．定義より M_f の任意の元は，或る n に對して z/f^n と表はすことが出來るので，θ が全写であることは自明である．更に，$\theta(\varphi_n(z)) = 0$ すなはち $z/f^n = 0$ のとき，$f^k z = 0$ と爲る整數 $k > 0$ が存在し，從つて

$\varphi_{n+k,n}(z)=0$ と爲る．此れより $\varphi_n(z)=0$ を得る．ゆゑに，θ により M_f と $\varinjlim A_n$ を同一のものと看做すことが出來る．

(1.6.2)　さて此處で，M_n，φ_{nm} 及び φ_n を其々$M_{f,n}$，φ^f_{nm} 及び φ^f_n と置き直す．g を A の元とせよ．f^n は $f^n g^n$ の因子であるので，次の函手性を有する準同型寫像を得る．

$$\rho_{fg,f}: M_f \to M_{fg} \quad (1.4.1 \text{ 及び } 1.4.3)$$

M_f 及び M_{fg} を其々$\varinjlim M_{f,n}$ 及び $\varinjlim M_{fg,n}$ と同一視すれば，$\rho_{fg,f}$ は $\rho^n_{fg,f}(z)=g^n z$ により定義さるる寫像 $\rho^n_{fg,f}(z)=g^n z: M_{f,n}\to M_{fg,n}$ の**歸納極限**と同一視さる．此れより，直ちに次の可換圖式を得る．

$$\begin{array}{ccc} A_{f,n} & \xrightarrow{\rho^n_{fg,f}} & A_{fg,n} \\ {\scriptstyle\varphi^f_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^{fg}_n} \\ A_f & \xrightarrow{\rho_{fg,f}} & A_{fg} \end{array}$$

1.7. 加羣の臺

(1.7.1)　A-加羣 M が與へられたとき，$M_{\mathfrak{p}}\neq 0$ と爲るやうな A の素イデヤルの集合を M の**臺**と云ひ，$\mathrm{Supp}(M)$ で表はす．$M=0$ と爲るためには，$\mathrm{Supp}(M)=\emptyset$ であることが必要且つ充分である．何と爲れば，任意の $\mathfrak{p}$ に對して $M_{\mathfrak{p}}$ ならば $x\in M$ の零化域は A の如何なる素イデヤルにも含まれぬ．從つて，その零化域は A 全體と爲る．

(1.7.2)　$0\to N\to M\to P\to 0$ が A-加羣の完全列なら

$$\mathrm{Supp}(M)=\mathrm{Supp}(N)\cup\mathrm{Supp}(P)$$

と爲る．何と爲れば，任意の A の素イデヤル $\mathfrak{p}$ に對して $0\to N_{\mathfrak{p}}\to M_{\mathfrak{p}}\to \mathrm{P}_{\mathfrak{p}}\to 0$ は完全 (1.3.2) で，$M_{\mathfrak{p}}=0$ である爲には $\mathrm{N}_{\mathfrak{p}}=\mathrm{P}_{\mathfrak{p}}=0$ であることが必要且つ充分である．

(1.7.3)　M が部分加羣の族 (M_λ) の直和であるなら，A の任意の素イデヤルに對して $M_{\mathfrak{p}}$ は $(M_\lambda)_{\mathfrak{p}}$ の直和である（1.3.3 及び 1.3.2）．從つて $\mathrm{Supp}(M)=\bigcup_\lambda \mathrm{Supp}(M_\lambda)$.

(1.7.4)　M が**有限型**A-加羣であるなら，$\mathrm{Supp}(M)$ は M **零化域を含む**素イデヤルの集合である．何と爲れば，M が一つの元 x により生成さるるのであれば，$M_{\mathfrak{p}}=0$ より，$s\cdot x=0$ と爲る $s\in\mathfrak{p}$ が存在することが分かる．從つて，$\mathfrak{p}$ は x の零化域を含まない．次に，M が有限生成系 $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ を有するものとし，x_i の零化域を $\mathfrak{a}_i$ とすれば，(1.7.3) より $\mathrm{Supp}(M)$ は $\mathfrak{a}_i$ を含む $\mathfrak{p}$ の集合，すなはち M の零化域である $\mathfrak{a}=\bigcap_i\mathfrak{a}_i$ を含む $\mathfrak{p}$ の集合と爲る．

(1.7.5)　M, N を其々**有限型**A-加羣とすれば次が爲り立つ．

$$\mathrm{Supp}(M\otimes_A N)=\mathrm{Supp}(M)\cap\mathrm{Supp}(N)$$

$\mathfrak{p}$ が素イデヤルであるとき，$M_{\mathfrak{p}}\otimes_{A_{\mathfrak{p}}}N_{\mathfrak{p}}\neq 0$ と云ふ條件は（(1.3.4) の議論により）《$M_{\mathfrak{p}}\neq 0$ 且つ $N_{\mathfrak{p}}\neq 0$》に同値であると理解することが肝要である．換言すれば P, Q が 0 に爲ら

ぬ**局所**環 B 上の有限型加羣であれば，$\mathrm{P} \otimes_B \mathrm{Q} \neq 0$ であることが肝である．$\mathfrak{m}$ を B の極大イデヤルとせよ．中山の補題により，ベクトル空間 $P/\mathfrak{m}P$ 及び $Q/\mathfrak{m}Q$ は 0 には爲らず，從つてテンソル積 $(P/\mathfrak{m}P) \otimes_{B/\mathfrak{m}} (Q/\mathfrak{m}Q) = (P \otimes_B Q) \otimes_B (B/\mathfrak{m})$ も 0 に爲らず，結論を得る．

特に M が有限型 A-加羣で，$\mathfrak{a}$ が A のイデヤルであれば，$\mathrm{Supp}(M/\mathfrak{a}\mathrm{M})$ は $\mathfrak{a}$ と M の零化域 $\mathfrak{n}$ を同時に含む，すなはち $\mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ を含む素イデヤルの集合である．